第二章 风险、不确定性及个人效用函数分析

對外經濟貿易大學
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

- 教学目的及要求：

1. 了解什么是风险和不确定性
2. 认识投资者的风险态度
3. 了解在投资者根据风险和收益为自己的资产组合标定福利或效用的方法

- 重点内容

　　掌握在风险和不确定性条件下投资者消费的效用满足的衡量风险的度量方法和投资者的风险态度

第一节 风险与不确定性

第二节 不确定性条件下的效用函数

第三节 风险厌恶、公平赌局、风险喜好

第一节 确定性、风险与不确定性

一、什么是风险与不确定性

二、不确定性下建立偏好模型的方法

三、不确定性下的决策原则

一、风险、不确定性与不确定性的定义

金融决策是时序决策，它们包括：选择，选择的结果向将来延伸。由于将来是未知的，金融决策不可避免的在不确定条件下进行。为了开始我们对金融经济学的研究，必须对“确定”和“不确定”进行概念上的区分。在此基础上，我们然后才能构筑在不确定条件下决策的标准上层结构。理解不确定条件下决策的原理对于充分评价金融经济分析的不同论点是必要的。

《风险、不确定性与利润》(1921)

Frank Hyneman Knight (1885-1972)

- Knight 不承认“风险=不确定性”，提出“风险”是有概率分布的随机性，而“不确定性”是不可能有概率分布的随机性。
- Knight 的观点并未被普遍接受。但是这一观点成为研究方法上的区别

对外经济贸易大学
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

（一）定义

奈特(1938)对风险与不确定性进行了明确的区分。根据费兰克·奈特(Frank·H·Kninght)的观点，所谓“不确定性”状态，是指**那些每个结果的发生概率尚未不知的事件**，如明年是否发生地震是不确定的。因此，不确定性是指发生结果尚未不知的所有情形，也即那些决策的结果明显地依赖于不能由决策者控制的事件，并且仅在做出决策后，决策者才知道其决策结果的一类问题。

- 所谓“风险状态”是指那些涉及以已知概率或可能性形式出现的随机问题，但排除了未数量化的不确定性问题。
- 所谓“确定性”指自然状态如何出现已知，并替换行动所产生的结果已知。

- 由于对有些事件的客观概率难以得到，人们在实际中常常根据主观概率或者设定一个概率分布来推测未来的结果发生的可能性，因此学术界常常把具有主观概率或设定概率分布的不同结果的事件和具有客观概率的不同结果的事件同时视为风险。
- 也就是说，风险与不确定性有区别，但在操作上，我们引入主观概率或设定概率分布的概念，其二者的界线就模糊了，几乎成为一个等同概念。

（二）风险来源的不同看法

- 风险与不确定性联系在一起。一项经济活动的风险可以由其收益的不可预测性的波动性来定义，而不管收益波动采取什么样的形式。
- 风险与其可能带来的不利后果相联系，一项经济活动的风险可以由收益波动的损失来定义。
- 一项经济活动的风险是与不确定性和相应的不利后果相联系的，即以价格或收益的波动衡量不确定性，在这种不确定性给投资者带来损失时就构成一项经济活动的风险。

（三）在投机与赌博中的风险

风险：承担风险一定要求风险补偿。

投机：在获取相应报酬时承担一定的风险。

赌博：是为一个不确定的结果打赌或下注。

二、不确定性下建立偏好模型的方法

（一）状态偏好方法（Arrow, Debreu, Hirshleifer)

用彼此排斥和详尽无遗的自然状态组成的集合，而不是用概率来反映个人所面临的随机性。

不确定性下选择的要素设定：

- A:可行行为的集合
- S:可能现实状态的集合
- C: 结果的集合

行为$a \in A$和$s \in S$结合产生的结果$c \in C$

函数f把行为与状态和结果对应起来：

$$(s,a) \rightarrow c=f(s,a)$$

- 当经济行为人在可行的行为之间进行选择时，他们以被选行为产生的结果为基础进行选择。但是行为对于决定特别的结果来说，常常是不充足的。其他因素会与选择的行为相互作用产生一个特别的结果。这些其他因素，超越了经济行为人的控制，被称为**现实状态**。
- 大量的现实状态的存在使得目前所采取的任何行为的将来结果是不确定的。

- 在决定行为的过程中，行为人对现实状态是不确定的，这些状态将共同确定被选行为的结果。选择行为a就为每一现实状态决定了一个结果f(s,a). 对A中行为的选取从而被视为对依赖状态（或偶然状态）结果的选取。

- 通过观察函数f可以容易区分确定条件下和不确定条件下的决策。

1. 若f关于现实状态是不变的，即现实状态不会影响产生的结果，则可以认为是确定条件下的决策。
2. 若不同的状态导致不同的结果，则可以认为是不确定条件下的决策。

- 一个简单的例子

对外经济贸易大学 UIBE 1951 UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

（二）用概率来描述

- 不确定条件下的决策另一种思考方法。在本质上它与上面描述的完全相同，但有时更易处理。
- 既然在行为、现实的状态和结果之间的关系通过函数$f:S\times A\rightarrow C$来描述， 在S上定一个概率测度：

对任意$a \in A$,存在一个C上的概率分布：对$K\subset C$,

$$Prob\{K\}:=Prob\{s \in S|f(s,a) \in K\}$$

- 简单地说，一个特定结果的概率等于现实状态的概率，给定一个行为，现实状态会导致结果。
- 公平的说一个行为的选择总的来说是对于结果的一个概率分布的选择。
- 考虑不确定条件下决策的一个同等方法就是将其作为在可选的概率分布之间所作的选择。

➢ 一个简单的例子

- 不确定条件下的选择的两种方式

1. 作为一种在依存状态的结果之间进行的选择
2. 作为一种在不同结果的概率分布之间进行的选择

三、不确定性下的决策原则

（一）确定性下的决策原则——收益最大准则

- 收益最大准则广泛应用于完全没有风险的情况下。按照这一法则，只需选取收益率最高的投资机会即可。通过正确的选择，可以实现投资期末的财富最大化。经济学中的生产者理论和价值理论广泛使用这一准则。

- 这样的一个收益最大准则可以应用于我们的不确定环境下的投资决策问题吗？特别是对于不确定收益的证券的资产组合的选择问题的应用？下面的例子表明，收益最大准则仅可以收益确定的环境中，而在收益不确定的情形，收益最大准则并不适用。

- 例子：一个公司的最优生产决策问题

（二）不确定性下理性决策的三种原则

- 数学期望最大化原则
- 期望效用最大原则
- 后期望效用最大原则

- **最大期望收益准则**——不确定的条件下
- 最大期望收益准则是指使用投资收益的预期值比较各种投资方案优劣。这一准则有其合理性，它可以对各种投资方案进行准确的优劣比较，同时这一准则还是收益最大准则在不确定情形下的推广。
- 例子：一个投资决策问题(沿用上题的例子)

- 是否期望收益最大准则就是一个最优的决策法则呢？

- 圣彼得堡悖论——

18世纪的一个经典的例子——圣彼得堡悖论，这个例子说服18世纪的学者期望收益最大化原则不是最合适的在不确定性下的决策原则。。

“圣彼德堡悖论”

- **1738** 年发表《对机遇性赌博的分析》提出解决“圣彼德堡悖论”的“风险度量新理论”。指出用“钱的数学期望”来作为决策函数不妥。应该用“钱的函数的数学期望”。

Daniel Bernoulli （1700-1782)

“圣彼德堡悖论”问题

- 考虑一个博弈，掷硬币直到头部出现为止。当头部出现时，如果投掷次数为x，则奖励金额为2^{x-1}元。一旦头部出现，博弈终止。从理论上来说，这一博弈可以无限进行下去。但为了参加这一博弈，愿意支付多少金额？

对外经济贸易大学 UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

“圣彼德堡悖论”问题（续）

- 有这样一场赌博：第一次赢得 1 元，第一次输第二次赢得 2 元，前两次输第三次赢得 4 元，……一般情形为前 n-1 次输，第 n 次赢得 2 的 n-1 次方元。问：应先付多少钱，才能使这场赌博是“公平”的？
- 如果用数学期望来定价，答案将是无穷大！
- 但经过试验观察，我们发现，为了参加这一游戏，人们愿意付出的金额在2-3之间。
- 因此，期望收益最大原则并不能解决一切的不确定性问题 。

- 对于证券投资来讲，只追求期望收益最大化的投资者绝不会选择一个多元化的资产组合。如果一种证券具有最高的期望收益，这个投资者会把他的全部资金投资于这种证券。如果几种证券具有相同的最大化期望收益，对这个投资者来说，投资于若干这些证券的组合或者只是其中的某一种证券是无差别的。由此可见，如果我们认为多元化是投资的基本原则的话，我们必须否定仅仅最大化期望收益原则的目标假定。

- **期望效用准则**
- 贝努力提出期望效用准则方法：**用期望效用作为最大化的目标**，假设投资者关心的是**期末财富的效用**，从而成功解决了圣彼得堡悖论问题。
- 用期末财富的对数形式或指数形式作为效用函数，则 alog(w) 或 $w^{1/2}$表示效用函数，w表示财富。 那么通过简单的计算，可以发现人们的确定等价财富的确在2-3元之间。

- 彼得堡大街悖论告诉我们，最大期望收益准则在不确定情形下的时候可能导致不可接受的结果。而贝努力提出的用期望效用取代期望收益的方案，可能为我们的不确定情形下的投资选择问题提供最终的解决方案。

- 期望效用原则是期望收益原则的一种替代。根据期望效用，20%的收益不一定和2倍的10%的收益一样好；20%的损失也不一定与2倍的10%损失一样糟

- 后期望效用理论：

由阿莱斯悖论等各种试验引发的新的期望效用理论，如前景理论、遗憾理论、加权的期望效用理论、非线性的期望效用理论等等行为金融学和非线性经济学对期望效用的新的解释。

第二节 期望效用理论

一、二元关系与偏好关系

二、效用函数

三、期望效用函数

四、期望效用准则矛盾

一、二元关系(binary relations)与偏好关系（preference relationship）

- 一个集合上的二元关系是确定这个集合中两元素之间的一种联系。
- 有的二元关系所涉及的两个元素有相同的性质，有的二元关系所涉及的两个元素则属于不同性质的集合。
- 有的二元关系满足一定的性质，如完全性、传递性、自反性、（非）对称性。我们主要考虑前三者。

一、二元关系(binary relations)与偏好关系（preference relationship）（续）

- 如果二元关系满足：对于任意$x,y,z \in X$, $x \geq y$, $y \geq z$, 意味着$x \geq z$, 则称$\geq$具有传递性。
- 如果二元关系满足：对于任意$x,y \in X$, 要么$x \geq y$, $y \geq x$, 则称 $\geq$具有完全性。
- 如果二元关系满足：对于任意$x \in X$, 有$x \geq x$, 则称$\geq$具有自反性。

- 定义: 偏好关系(preference relationship) 是指具有传递性、完全性、自反性的一个二元关系≥。

- 给定偏好关系≥，称x与y是无差别的，如果x ≥y， y ≥x。记为x~ y
- 称x严格偏好y，如果x ≥y，但y ≥x不成立。记作： x >y

二、效用函数——确定性下的选择与福利标定

- 效用函数：表示偏好关系的函数。X上的偏好关系可以用效用函数来表示是指存在X到R的函数U，使得

$$\forall x_1，x_2 \in X，x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow U(x_1) \geq U(x_2)$$

三、期望效用函数

- 给定偏好关系虽然可以用效用函数来表示，但是当可能状态数目非常巨大时，证券组合是一个高维的向量或随机变量。为此， 我们对效用函数进一步限制，经常用一类更为特殊的、性质更好的效用函数—期望效用函数。下面我们将讨论在什么情形下，偏好关系不单单 能被效用函数表示， 而且是期望效用函数表示 。

（一）不确定性下的选择问题与对象

- 不确定性下的选择问题是其效用最大化的决定不仅对自己行动的选择，也取决于自然状态本身的选择或随机变化。
- 因此不确定下的选择对象被人们称为彩票（Lottery)或未定商品（contingent commodity)

- 投资者的证券组合选择——抽彩lottery
- 投资者的消费计划（或者投资收益）也可以看成一个彩票，Z中的元素为所有可能各种奖金数额，不妨设$Z=\{z_1,\ldots.z_n\}$，得到奖品的z_i的概率为$p(z_i)$, $i=1,2..n$.
- $(z_1,p_1;\ldots;z_n,p_n)$表示一次性抽彩$p\in P$。

- 复合性抽彩(a compound lottery): 一次性抽彩的线性组合,记为

$$\alpha p \oplus (1-\alpha) q$$

（二）期望效用函数——不确定性下的福利表达方式

- 在不确定性下，商品量(证券收益）都是随机变量，在所涉及的随机商品量x集合上直接定义效用函数u，它应该满足：
- $E[u_1(x)]=u(x)$，

$u_1(x)$是一个随机变量，若具体到以概率p取a,以概率（1－p)取b的随机变量x，这种效用函数应满足：

- $pu(a)+(1-p)u(b)=u(x)$，其含义是一种“未定商品”的效用就等于该“未定商品”所涉及的“确定商品”效用的均值。
- 满足这样条件的效用函数就是期望效用函数或von Neumann-Morgenstern效用函数

- 所谓期望效用函数是定义在一个随机变量集合上的函数，它在一个随机变量上的取值等于它作为数值函数在该随机变量上取值的数学期望。用它来判断有风险的利益就是比较“钱的函数的数学期望”（“而不是钱的数学期望”）。

VNM期望效用函数

（上）John von Neumann (1903-1957)

（下）Oskar Morgenstern (1902-1977)

- 1944 年在巨著《对策论与经济行为》中用数学公理化方法提出期望效用函数。这是经济学中首次严格定义风险

（三）期望效用函数的公理化陈述

- 定理 定义在P上的偏好关系，若它满足如下公理，则该偏好关系可以 用von Neumann and Morgensern期望效用函数表示，并且期望效用函数是唯一的。

公理1

- 二元关系>是一个定义在P上的偏好关系，满足：

  自返性

  传递性

  完全性

- 公理2 （**独立性公理或替代公理，** *Independent or Substitute Axiom*）对于p,q $\in$ P, p>q, 意味着 ap+(1-a)r> a q+(1- a)r, 对任意r $\in$ P，任意a $\in$ (0,1)。
- 含义:引入一个额外的不确定性的消费计划不会改变原有的偏好。也即消费者对于一个给定事件中的消费p、q的满意程度并不依赖于如果另外事件发生时消费r将会是什么。

- 公理3（阿基米德公理， Archimedean Axion）对于 $p,q,r \in P, p>q>r$, 则存在实数 $a, b \in (0,1)$ 使得 $ap+(1-a)r>q>bp+(1-b)r$

- 含义:没有哪一个消费计划p好到使得对任意满足q>r的消费计划q,r，无论概率b多么小，复合彩票bp+(1-b)r不会比q差。同样，没有哪一个消费计划r， 差到使得对任意满足p>q的消费计划p,q，无论概率a多么大，复合彩票ap+(1-a)r不会比q好。**即不存在无限好或无限差的消费计划。**(数学上有类似的阿基米德公理)

四、期望效用准则矛盾

- 反对期望效用准则的最有趣和最相关的论证，通常包括几个这样的特例：受试者经过深思熟虑之后，反而会选择不符合该准则的行动方案。这种情况简单合理，人们的选择相当明确，因而选择与准则之间的矛盾似乎不可避免。我们的结论只能是，或者期望效用准则不是理性行为，或者人们有一种非理性的天生偏好，即使是在他思考最多的时候。

“ Allais 悖论” (1953)

- 期望效用函数似乎是相当人为、相当主观的概念。一开始就受到许多批评。其中最著名的是“ Allais 悖论” (1953)。
- 由此引起许多非期望效用函数的研究，涉及许多古怪的数学。但都不很成功。
- （法）Maurice Allais (1911-) 1986 年诺贝尔经济奖获得者。

對外經濟貿易大學
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

- 两个非常有趣的例子

投资者可能偏好一个不符合期望效用准则的方案。在每个例子中，“错误”方案都有一个似是而非的外表，并被许多受试者选中。

- 例1.投资者可以选择以下3种彩票：彩票A赢得1000美元的机会是1/1000；彩票B赢得100美元的机会是1/100；彩票C赢得1000的机会是1/2000，赢得100美元的机会是1/200。

- 你会选择哪一种彩票？A,B,or C?

- 要求受试者在方案A,B,C之间进行选择，他们经常会表示出对**C的明确偏好**。
- 但是，U_C不可能比U_A 和U_B更大。
- 对那些显示偏好C的受试者，我们可以继续提问，问他们在A和B之间是否更偏好A或者相反。争论仍然存在。

- 为具体起见，我们假定A偏好B。我们再来询问他是否愿意要确定性的A或者要得到A或B的机会各半的方案。换言之，我们是直接选中A还是通过抛硬币来决定选A或B？
- 实验证明，那些表示A偏好B的投资者一致认为，他们愿意选择A，而不是A或B的机会各半。

- 不难发现，抛硬币选择A或B的结果的概率分布于彩票C的分布完全相同。因此我们可以将投资者的偏好概括如下：C偏好A；A偏好A或B各50%；但是A和B各50%又恰好与C一样好。因此**C明确偏好A, A明确偏好C**—矛盾。

- **例 2阿莱斯悖论1**

- 方案A：确定得到1000000美元；
- 方案B： 得到5000000美元的概率是0.1

  得到1000000美元的概率是0.89

  得到0美元的概率是0.01

- 他发现，在A和B中，他的受试者偏好于A。于是，他进一步要求受试着考虑一下情形：

- 方案C：以0.11的概率得到1000000美元
  以0.89的概率得到0美元
- 方案D: 以0.10的概率得到5000000美元
  以0.90的概率得到0美元

- 当A和B作为备选方案时选A，当C和D作为备选方案时选C，就违背了期望效用原则。
- 通过计算表明，如果遵从期望效用原则的投资者A和B之间偏好A，那么他必须在C和D之间偏好D。这是一个矛盾。

- 例 2阿莱斯悖论2
- 方案A：确定得到1000000美元；
- 方案B:　0.98的概率得到5000000美元，
- 0.02的概率得到0美元

- 方案C: 以0.01的概率得到1000000美元，
- 以0.99的概率得到1美分
- 方案D 以0.0098的概率得到5000000美元
- 以0.0002的概率得到0美元，
- 以0.99的概率得到1美分。
- 阿莱斯发现理性人在A和B之间偏好A，在C和D之间偏好D. 这实际上违背了期望效用准则

- 显然，期望效用理论受到了“阿莱悖论”的严峻挑战。“阿莱悖论”实质上是要解释，许多建立在独立性假设上的期望效用，尤其是建立在追求期望效用最大化基石上的模型，都忽略的人的心理因素对概率分布的影响。因此，在“阿莱悖论”提出后，许多学者包括经济学家和心理学家均尝试着对不确定性下的选择行为进行进一步探索，力图揭示其中的心理因素与心理机制。

总结

1. 本节为在不确定条件下进行选择提出了基础性的理论框架。我们从对不确定性的标准描述开始，提出看待不确定体条件下的选择的两种方式：

   1） 作为一种在依存状态结果之间进行的选择

   2)作为一种在不同结果的概率分布之间进行的选择

2. 本节还讨论了期望效用准则，偏好关系的效用函数表示，以及期望效用函数存在的条件，并给出了几个期望效用准则的反例。

第三节 人们对风险的主观态度于风险度量

一、风险的客观度量

二、个体风险的主观态度

三、确定性等值、风险升水与风险厌恶度量

一、风险的客观度量

- 人们一般用离差、方差或标准差来对风险进行客观度量。

二、风险厌恶、公平赌博与风险中性、风险喜好

- 18世纪著名的数学家Daniel Bernoulli 在研究赌博问题时发现，人们往往对赌博输掉的钱看得比可能赢的钱跟重。例如:有一个掷硬币的赌局，假定硬币是完全对称的，正面朝上可以赢2000元，反面朝上1分钱也没有。现在入局费为多少，才能使这场赌博为一场公平的赌博?

1. 公平赌博

- 公平赌博是指不改变个体当前期望收益的赌局，如一个赌局的随机收益为ε，其变化均值为E(ε)=0的赌局。或者公平赌博是指一个赌博结果的预期只应当和入局费相等的赌博。

- 考虑一个博弈，它以概率p有一个正的回报h_1,以概率（1-p）有负收益h_2, 它称为一个公平的赌博是指$ph_1+(1-p)h_2=0$。
- 如果在某场博弈中，某一局中人所赢钱的数学期望值大于零，那么此人应当先交出等于期望值的钱来，才可以使得这场赌博变得公平。
- 或者说公平的赌博得结果的预期只应当和入局前所持有的资金量相等，即赌博得结果从概率平均意义上的应该是不输不赢。

- 思考：有这样一个赌局：抛硬币，字为上你能得到200元，否则你什么都得不到。如果参加的本金分别为100，50，0，判断是否为公平赌博

若投资者的初始财富为W_0，他不参与一个公平赌博，则其效用值是$U(W_0)$,若参与，则其财富会起变化，变化的财富的期望效用是以p取（ W_0 ＋h_1),以（1－p）取（ W_0 ＋h_2),比较投资者对二者之间态度，可以判断投资者的风险态度。

2. 风险厌恶

- 定义：如果投资者不喜欢参与任何公平的赌博，即$u(W_0) \geq pu(W_0+h_1)+(1-p)u(W_0+h_2)$，则称投资者是风险厌恶型。此时，效用函数u是一个凹函数，更一般的表示为：$u(E(W)) \geq E(u(W))$。
- 个体风险厌恶是指个体不愿意接受或至多无差异于任何公平的赌博。
- 个体严格风险厌恶是指个体不乐意接受任何公平的赌博。
- 定理 u的凹性对应着个体风险厌恶；u的严格凹性对应着个体严格风险厌恶。

- 风险厌恶者之所以回避公平赌博，从直观来讲，原因是损失带来的“不愉快”量大于可能的赢所带来的“愉快”量。（可以用例题说明）

3.风险喜好

- 定义：如果投资者喜欢参与所有公平的赌博，即$u(W_0) \leqslant pu(W_0+h_1)+(1-p)u(W_0+h_2)$，则称投资者是**风险爱好**型。此时，效用函数u是一个凸函数，更一般的表示为：$u(E(W)) \leqslant E(u(W))$。

- 这种投资者把风险的“乐趣”考虑在内，使预期收益率上调。因为上调的风险效用的公平赌博的确定等价值高于无风险投资，风险爱好者总是加入公平赌博。

4、风险中性

定义：如果投资者对是否参与所有公平的赌博没有任何差别，则称投资者是**风险中性**型。此时，

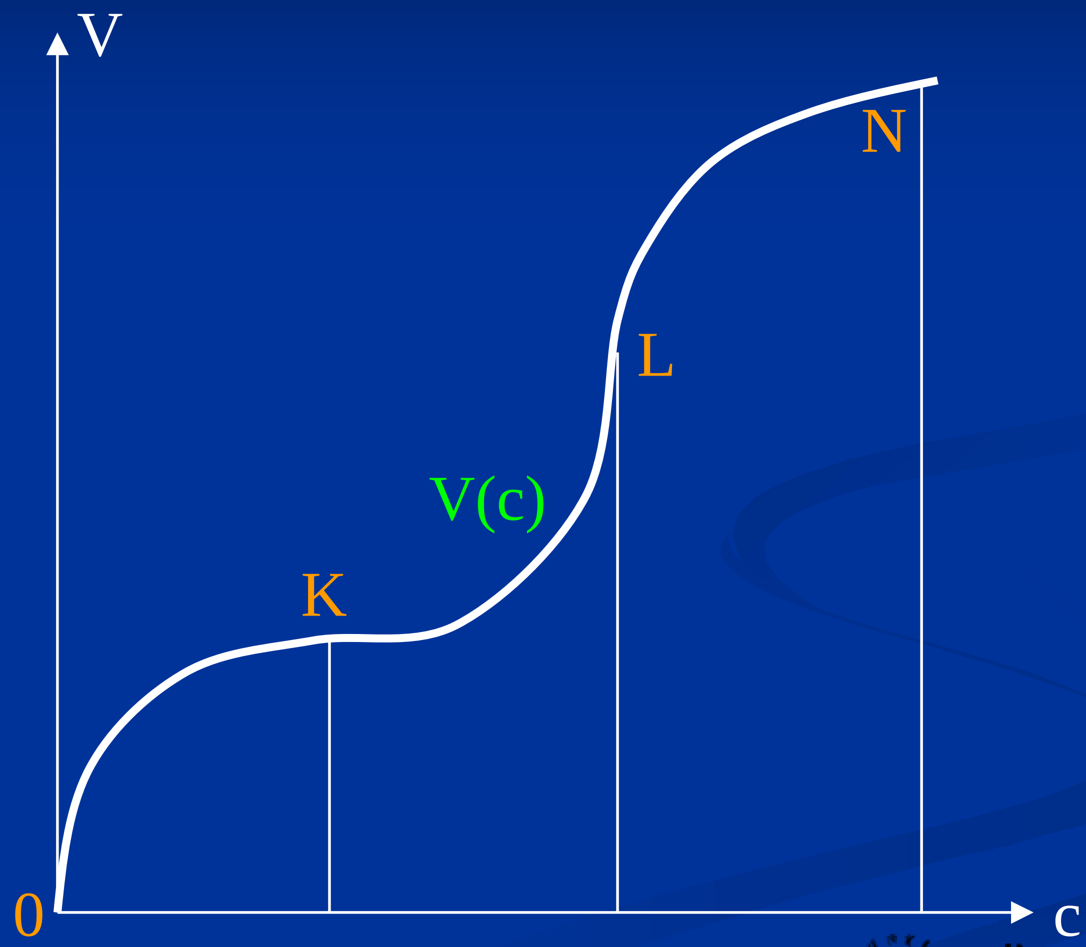
$u(W_0)=pu(W_0+h_1)+(1-p)\,u(W_0+h_2)$，

- 效用函数u是一个线性函数，更一般的表示为：

$u(E(W))=E(u(W))$

- 这时，投资者对风险采取完全无所谓的态度，不对风险资产要求任何风险补偿。投资者只是按照预期收益率来判断风险投资。风险的高低与风险中性投资者无关，这意味着不存在风险妨碍。对这样的投资者来说，资产组合的确定等价报酬率就是预期收益率。

复合型的风险偏好



三、风险厌恶度量、确定性等值与风险升水

- 假定所有投资者是厌恶风险的，然而每个人风险厌恶的程度可能个不相同，因此需要对风险厌恶程度给出一个度量。
- Markowitz risk premium
- Pratt-Arrow risk premium

（一）确定性等值与Markowitz risk premium

- 定义：W_0-f(W_0,H)或E[W’]-f(W’)称为确定性等值（certainty equivalent wealth）
- 确定性等值是一个完全确定的量，在此收入水平（被认为这是一个确定性财富）上的效用水平等于不确定条件下财富的期望效用水平。
- 定义：f(W_0,H) 是投资者为了避免参与赌博（一个不确定性）愿意放弃的财富或缴纳罚金的最大数量。这个特定的额度称为罚金f(W_0,H)或Markowitz risk premium.

- 它们满足下式

$$u(W_0-f(W_0,H))=pu(W_0+h_1)+(1-p)u(W_0+h_2)$$

其含义是一个确定的初始财富减去一个特定的额度后的效用相当于不确定财富的期望效用

更一般表示为

$$u(E[W']-f(W'))=E[u(W')],$$

其中，$W'=W_0+H$

- $f(W_{0,}H)$ 是一个收入额度，当一个完全确定的收入减去该额度后所产生的效用水平仍等于不确定性条件下财富的期望效用水平。该额度越大表明投资者为了避免赌博愿交的罚金越多，因而就越厌恶风险。

作业1

- 假设投资者面临如下所示的一个赌博，假设他的初始财富为10，其效用函数为对数函数，计算这个投资者的为避免赌博而愿意缴纳的罚金以及他的确定性等价财富，并分析说明罚金和确定性等价财富的经济意义。
- 0.8　5元

10元

0.2

30元

作业2

- 一个彩票，可能以概率0·2赢900元，也可能以0·8输100元，消费者的效用函数形式为u=w,问消费者愿拿出多少钱去买这张彩票？其风险升水是多少？

（二）Pratt-Arrow risk premium

- **定义** 考察风险很小的赌博，Pratt-Arrow风险溢价定义为：

$$f(W_0,h)=\frac{\sigma_h^2}{2}\left(-\frac{u''(E(W_0))}{u'(E(W_0))}\right)$$

❖ 绝对的厌恶风险型

- 对于个体效用函数，定义它的绝对风险厌恶系数为：

$$R_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- 用来判断当个体在风险资产与无风险资产之间进行选择时，是否能像对待正常商品一样对待有风险资产。

- 定义 如果R_A（）是严格递减的函数，即 $\frac{dR_A(z)}{dz} < 0, \forall z$，那么称投资者是递减绝对风险厌恶的，类似的，若 $\frac{dR_A(z)}{dz} = 0, \forall z$ ，那么称投资者是常绝对风险厌恶的，若 $\frac{dR_A(z)}{dz} > 0, \forall z$ ，则称投资者是递增绝对风险厌恶的。

- 定理（**阿罗-普拉特定理**）对于递减绝对风险厌恶者来说，随着个人财富的增长，他对风险资产的投资也就越大；对于递增绝对风险厌恶者，随着个人财富的增加，他对风险资产投资反而减少（视风险资产为劣质品）；对于常绝对风险厌恶者，他对风险资产投资与财富无关。

- 前面我们已经知道：显示递减绝对风险厌恶系数的投资者，当财富增加时，他对风险资产的绝对投资量也会增加，但是，不能回答，相对于总财富的风险投资比例是增加还是减少。引入相对风险厌恶的概念可以回答这一问题。

- 相对的厌恶风险型

对于个体效用函数，定义它的相对风险厌恶系数为：

$$R_R(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- 定义：
- 如果R_R（）是严格递减的函数，即 $\frac{dR_R(z)}{dz} < 0, \forall z$，

  那么称投资者是递减相对风险厌恶的；

- 若 $\frac{dR_R(z)}{dz} = 0, \forall z$ 那么称投资者是常（不变）相对风险厌恶的；

- 若 $\frac{dR_R(z)}{dz} > 0, \forall z$ ，则称投资者是递增相对风险厌恶的。

UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

- 定理 对于递增相对风险厌恶者，风险资产需求的财富弹性小于1（即随财富的增加，投资于风险资产相对于财富的比例下降），对于不变相对风险厌恶者，风险资产需求的弹性等于1，对于递减相对风险厌恶者，风险资产需求的财富弹性大于1 （即随财富的增加，投资于风险资产相对于财富的比例上升））。
- 财富弹性：随着财富的增加，投资于风险资产的比例相对于财富的增加而减少（不变，增加）。

究竟现实中的投资者属于哪种风险厌恶类型?

- 普遍接受的看法是，大多数人具有递减绝对风险厌恶系数和不变相对厌恶系数，这反映了大多数投资者的投资行为。
- 但也有人认为具有递减绝对风险厌恶系数，递减相对风险厌恶系数也许更能反映大多数人投资者的行为.