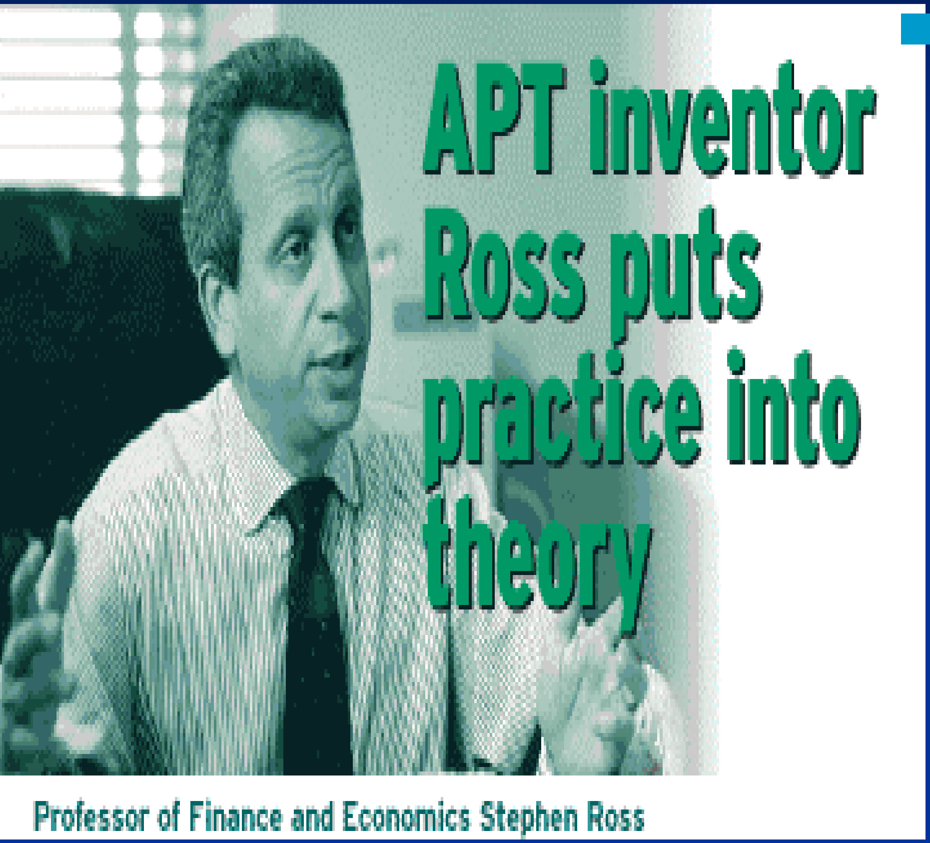
第 六 章

套利定价模型(*Arbitrage Pricing Theory*)*与资本市场的无套利均衡分析*

本章主要问题和学习重点

- 了解和掌握金融市场均衡的特殊机制——无套利均衡机制
- 掌握无套利均衡下的证券收益与风险的关系



- APT 是作为 CAPM 的替代物而问世的。CAPM 的验证涉及对市场组合是否有效的验证，但是这在实证上是不可行的。于是针对 CAPM 的单因素模型，罗斯提出目前被统称为 APT 的多因素模型来取代它。

- 第一节 套利定价理论的假设和逻辑起点
- 第二节 套利及套利的发生
- 第三节 套利定价理论的模型

- 第一节套利定价理论的假设和逻辑起点

一、套利定价理论的假设条件分析

二、套利定价理论的逻辑起点

一．套利定价理论的假设条件分析

我们把套利模型的假设条件和CAPM模型的假设条件作个比较，可以得到APT模型和CAPM模型共同拥有的以下假设：

- 投资者有相同的投资理念存在着大量投资者.
- 投资者追求效用最大化
- 投资者是价格的接受者，单个投资者的交易行为对证券价格不发生影响。
- 没有交易成本。

对外经济贸易大学
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

而APT模型不需要以下的假设条件：

- 单一投资期
- 不存在税的问题
- 投资者能以无风险利率自由地借入和贷出资金
- 投资者以回报率的均值和方差选择投资组合

二．套利定价理论模型的逻辑起点——因素模型与充分分散风险的投资组合

1. 因素模型

在套利定价理论中，我们将先从考察一个单因素模型入手，这个模型假设只有单个系统因素影响证券的收益。

资产收益的不确定性来自两个方面：共同或宏观经济因素和厂商的特别风险

- 如果我们用F表示共同因素期望值的偏差，βi表示厂商i对该因素的敏感性，εi表示厂商特定的扰动，则该单因素模型表明厂商的实际收益等于其初始期望收益加上一项由未预料的整个经济事件引起（零期望值）的随机量，再加上另一项由厂商特定事件引起（零期望值）的随机量。
- 其公式为：$r_i = E(r_i) + \beta_i F + \varepsilon_i$
- 条件是：$E(F)=0, E(e_i)=0, \mathrm{cov}(F,e_i)=0$

  $\mathrm{cov}(e_i,e_j)=0$

- 为了使这个单因素模型更加具体，我们举一个例子：
- 假设宏观因素F代表国民生产总值（GNP）的意外的百分比变化，而舆论认为今年GNP将变化4%。我们还假定一种股票的β值为1.2。
- 如果GNP只增长了3%，则F值为-1%，表明在与期望增长相比较时，实际增长有1%的失望。给定该股票的β值，可将失望转化为一项表示比先前的预测低1.2%的股票的收益。这项宏观的意外加上厂商特定的扰动，就决定了该股票的收益对其原始期望值的全部偏离程度。

2. 充分分散风险的投资组合

假如一个投资组合是充分分散风险的，那它的厂商特定风险或非系统风险可以被分散掉，保留下来的只有因素（系统）风险，即收益与风险为：

$$r_p = E(r_p) + \beta_p F$$

$$\sigma_p = \beta_p \sigma_F$$

这里：$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$

UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

- 我们把充分分散的投资组合定义为：满足按比例分散持有足够大数量的证券组合，而每种证券i的数量又到可以使非系统方差被忽略掉。
- 既然非系统风险因素可以被分散掉，那么只有系统风险在市场均衡中控制证券的风险溢价。在充分分散的投资组合中，各个厂商之间的非系统风险相互抵偿，因此，在一个证券组合中，与其期望收益相关的就只有系统风险了。

第二节　套利及套利的发生

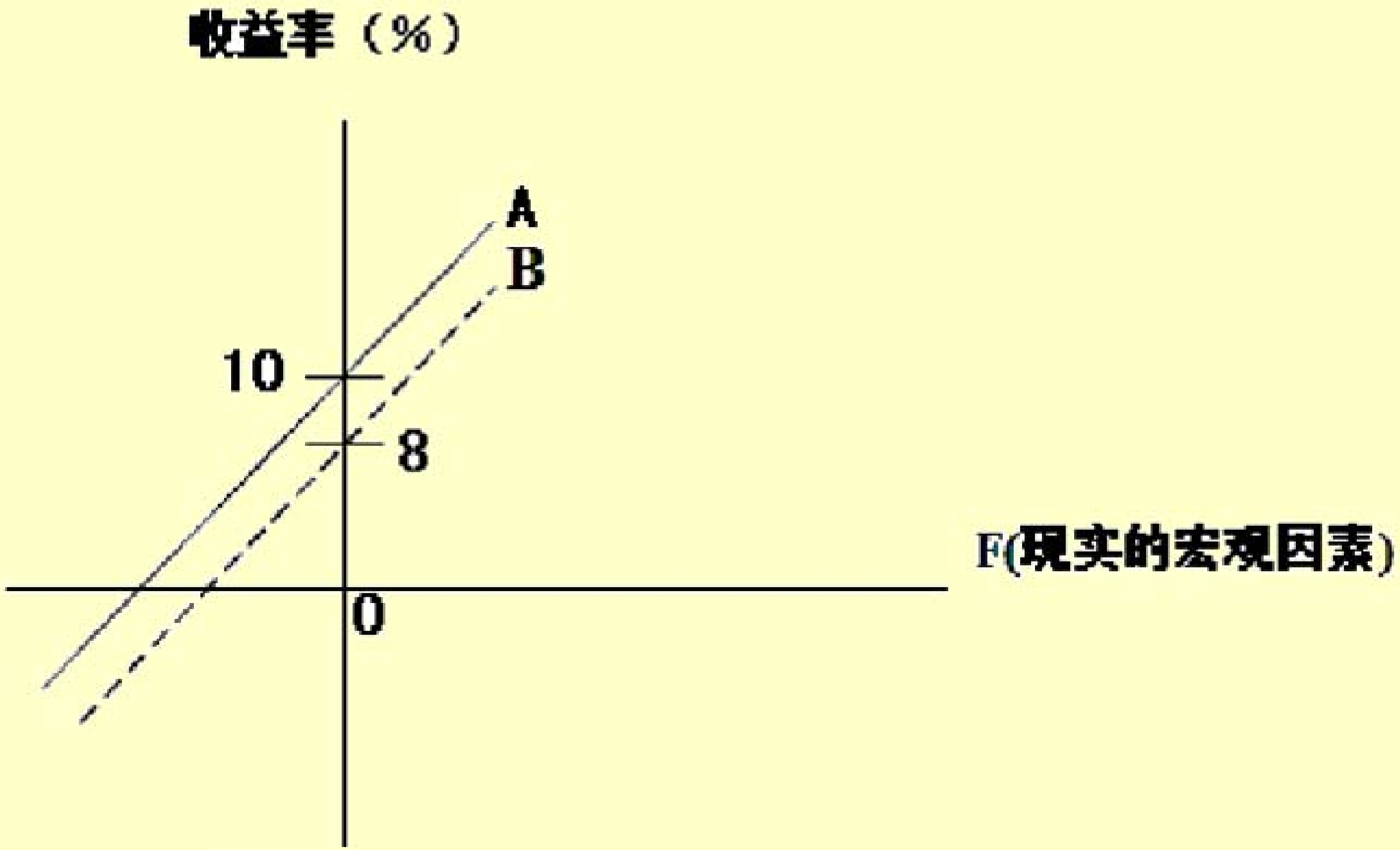
- 一、具有相同贝塔值的套利
- 二、具有不同贝塔值的套利
- 三、多因素的套利

一、具有相同β值的套利

- 如果两个充分分散化的投资组合有相同的β值，那它们在市场均衡时必定有相同的预期收益。

$$\beta_A = \beta_B \Rightarrow E(r_A) = E(r_B)$$

- 否则有套利机会出现，通过套利使二者的预期收益率相等。



系统风险函数的收益：套利机会出现

已知分散化的投资组合的收益是：

$$r_p = E(r_p) + \beta_p F \qquad \text{（单因素）}$$

套利组合的构成及套利过程

(0.10+1.0×F)×100万美元（在资产组合　A上作多头）

－（0.08＋1.0×F）×100万美元（在资产组合B上作空头）

0.02×100万美元＝20 000美元 （净收益）

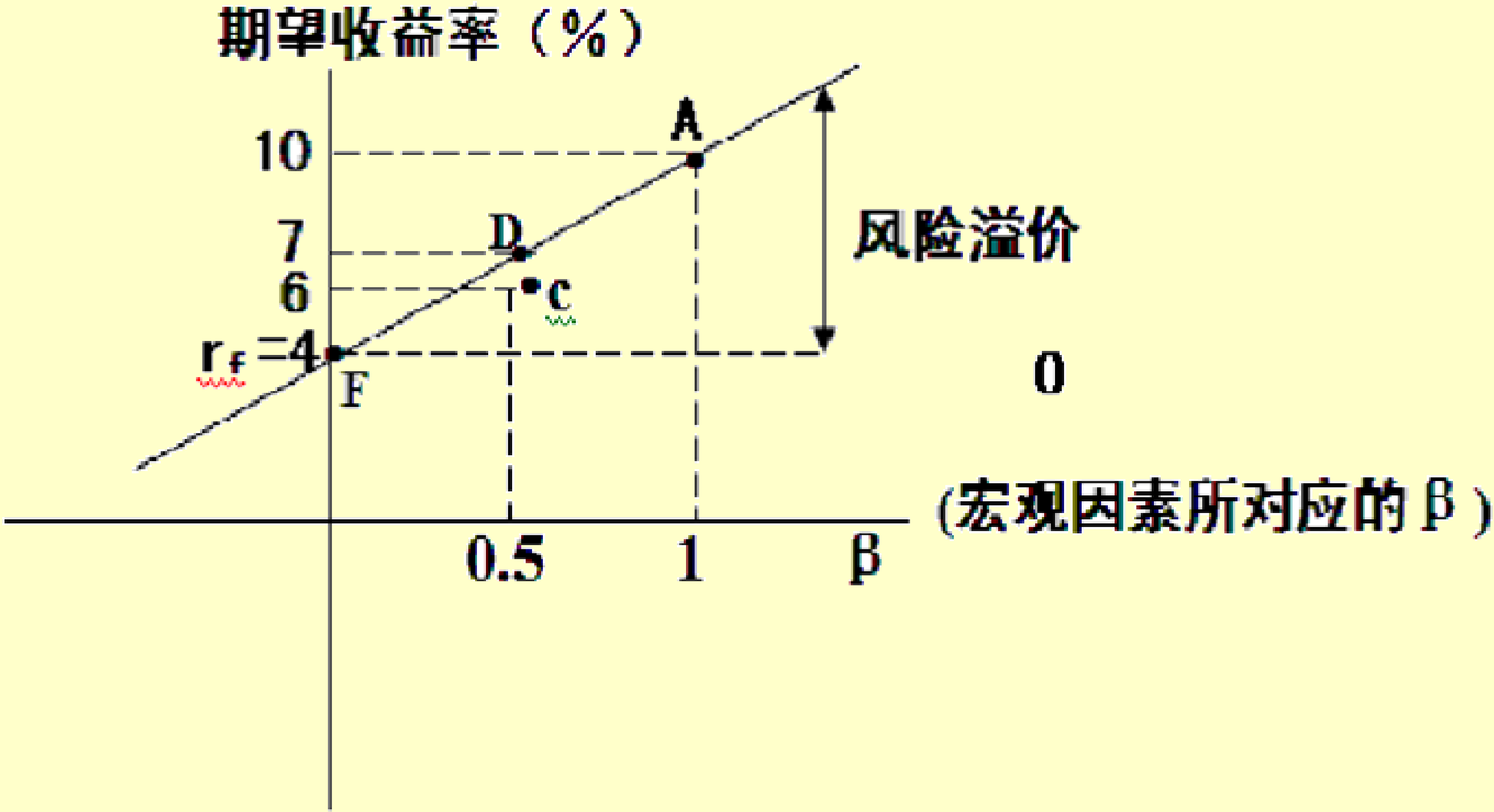
这样，我们就获得了一项无风险利润。这项策略要求净投资为零。我们应继续需求一个尽可能大的投资规模，直至两个组合间的收益差消失为止。具有相同β值的投资组合在市场均衡时一定具有相同的期望收益，否则将存在无风险套利机会，通过套利使二者预期收益相等。

二．具有不同β值的套利

- 对于有不同β值的充分分散化的投资组合，其预期收益率中风险补偿必须正比于β值，不然也将发生无风险套利。

$$\frac{E(r_p)-r_f}{\beta_p}=\frac{E(r_q)-r_f}{\beta_q}=K$$

- 参见图5-2，假定无风险收益率r_f是=4%，有一充分分散化的投资组合C的β值为
- β c=O.5，具有预期收益率6%。在图中，代表投资组合C的点位于连接无风险资产和组合A的直线的下方。现在我们来看另一个投资组合D，这个组合一半由组合A另一半由无风险资产组成。这样，组合D的β值为$\beta_D=0.5\times0+0.5\times1.0=0.5$，预期收益率是$0.5\times4\%+0.5\times l0\%=7\%$。组合D和组合C的β值相等而预期收益率不等，如前所述，会发生套利。



不同贝塔值下的套利机会

- 套利组合及套利过程

（做D多头）(0·5×0·04+0·5×0·1＋0·5F)100万

（做C空头）－（0·06＋0·5F）100万

结果是：套利组合的收益为正；收益无风险，即套利组合对因素的敏感度为零；净投资为零。

三、多因素的套利

- 两个宏观因素的模型是这样的 ε_i
- $r_i = E(r_i) + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 +$
- 假设因素F1代表对GDP预期值的偏离，因素F2则代表未预期到的通货膨胀率的变化，它们的预期值都等于零，因为它们代表的都是对预期值的偏离。同样ε_i代表企业特有的风险，也是对预期值的偏离，所以预期值也为零。

- 引进因素组合概念:

因素组合是非系统风险已经充分分散化或消除掉的组合，并且它对其中一个因素F_j的β_i值为1而对其他因素的β_i值都为0, $i \neq j$ 。

- 因素组合的作用在于：用因素组合作为基准组合来定价（如同CAPM的市场组合作用一样）。

- 将因素组合的期望收益记为 δ_j ，则因素组合的风险补偿 $\lambda_j = \delta_j - r_f$
- 假如有两个因素组合的 δ_j 期望收益分别为10％和12％，无风险资产收益为4% （已知条件）
- 现在来看任意一个充分分散化的投资组合A，它对两个宏观因素的值分别是 $\beta_{A1}=0·5$和 $\beta_{A2}=0.75$ （已知条件）。
- 则A的预期收益一定为13％，否则有套利风险。

- 如果投资组合A的预期收益率不等于13％，例如是12％，则可以构筑如下的组合头寸:
- 取权重为50％的因素组合1，权重为75％的因素组合2，再加上权重为-25％的无风险证券(权重是负数意味着以无风险利率借入)，构成一个新的组合。
- 这个组合的预期收益率为0.5×IO％+0.75×12％-0.25×4％=13％。同时构筑这个组合的多头和组合A的空头，就能套取无风险利润。算式如下

- 到期套利组合多头的收益 13%+0.5×F1+0.75×F2
- 到期组合A空头的支付

—（12%＋0.5×F1+0.75×F2）

- ———————————————————
- 净利润　　　　　　　　　　　　1%

结果仍是：套利组合的收益为正；收益无风险，即套利组合对因素的敏感度为零；净投资为零。

- 从这个简单的例子我们可以发现，套利组合是这样构筑的，对于任意一个暴露在F1和F2，这两个宏观因素的系统风险下的任意投资组合P，分别以其β值 β_{P1}，β_{P2}为权重选取因素组合1和2，再加上权重为$1-\beta_{P1}-\beta_{P2}$，无风险证券(若$1-\beta_{P1}-\beta_{P2}<0$，表示无风险证券的卖空或以无风险利率借入资金)。这一套利组合实际上复制了组合P，所以组合P可由此套利组合给出定价

- $E(r_P) = \beta_{P1}\delta_1 + \beta_{P2}\delta_2 + (1 - \beta_{P1} - \beta_{P2}) r_f$

$= r_f + \beta_{P1}(\delta_1 - r_f) + \beta_{P2}(\delta_2 - r_f)$

- 从投资组合A的例子看，A的风险补偿就是：

$\beta_{A1}[\delta_1 - r_f]+ \beta_{A2}[\delta_2 - r_f]$

- =0.5×6%十0.75×8%=9%
- 于是，A投资组合总的预期收益率就是无风险收益率加上总的风险补偿，为13％。
- A投资组合的总的风险补偿应当是投资者承受这两种宏观因素的系统风险所应得到的风险补偿的和。而每种宏观因素的系统风险的补偿等于相对于该因素的贝塔值乘以因素组合的风险补偿

第三节 套利定价模型

- 一、套利机会的条件
- 二、套利定价方程
- 三、CAPM与APT比较

一、套利机会存在的条件（或套利组合的建立）

- 设市场有N种证券，Wi表示投资者对证券持有权数的变化根据套利的定义，套利有自融资功能，套利组合中买入证券所需资金由证券获得。
- 根据套利的定义，如果套利机会存在，套利组合不承担风险，对任何因素的敏感性为零，

  即 $b_{PJ}=0$，J=1,2,..K　N需大于J,
- 根据套利的定义，套利须获得非负的收益。

第一个条件：$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = 0$

第二个条件：$\beta_{pj} = 0, j = 1, 2, 3, \ldots k$

即：

$$W_1\beta_{11} + W_2\beta_{21} + W_3\beta_{31} + \ldots + W_N\beta_{N1} = 0$$

$$W_1\beta_{12} + W_2\beta_{22} + W_3\beta_{32} + \ldots + W_N\beta_{N2} = 0$$

.

....

$$W_1\beta_{1K} + W_2\beta_{2K} + W_3\beta_{3K} + \ldots + W_N\beta_{NK} = 0$$

这时满足这两个等式的任何一组解将成为潜在的套利组合，即满足自融资和无风险套利条件。

第三个条件：

$$w_1\bar{r}_1+w_2\bar{r}_2+w_3\bar{r}_3+\ldots+w_n\bar{r}_n>0$$

因此，当一个组合满足上述三个方程时，便存在一个能获得不承担风险的正的收益的套利组合。

二、套利定价方程

- 当套利机会不存在时，市场均衡。那么，当各种证券的期望收益处于什么状态时，没有套利机会呢？即各种证券的期望收益处于什么状态时，上述三个方程的联立解不存在呢？
- 且仅当期望收益率是敏感性的线性函数时，上述三个方程的联立解不存在，即不存在套利机会，这时市场达到均衡。即有：

- $E(r_i) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{i1} + \lambda_2 \beta_{i2} + \ldots\ldots + \lambda_K \beta_{ik}$
- β_{ik}**是第i个证券第k个因素的敏感度。如果市场有无风险资产，上式为**
- $E(r_i) = r_f + \lambda_1 \beta_{i1} + \lambda_2 \beta_{i2} + \ldots\ldots + \lambda_K \beta_{ik}$

λ_j是因素组合的风险补偿： $\lambda_j = \delta_j - r_f$

- 投资组合的总的风险补偿应当是投资者承受宏观因素的系统风险所应得到的风险补偿的和。而每种宏观因素的系统风险的补偿等于相对于该因素的贝塔值乘以因素组合的风险补偿。
- 因此，套利定价方程是：

$$E(r_i)=r_f+\beta_{i1}\left(\delta_1-r_f\right)+\beta_{i2}\left(\delta_2-r_f\right)+\dots+\beta_{ik}\left(\delta_k-r_f\right)$$

对外经济贸易大学
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

举例：单因素套利组合

$$r_i = a_i + b_i F + e_i$$

- 假定投资者拥有3种证券，他所持的每种证券当前的市值为4000000美元。这三种证券具有如下的预期回报率和敏感性.这样的预期回报率与因素敏感性是否代表一个均衡状态？

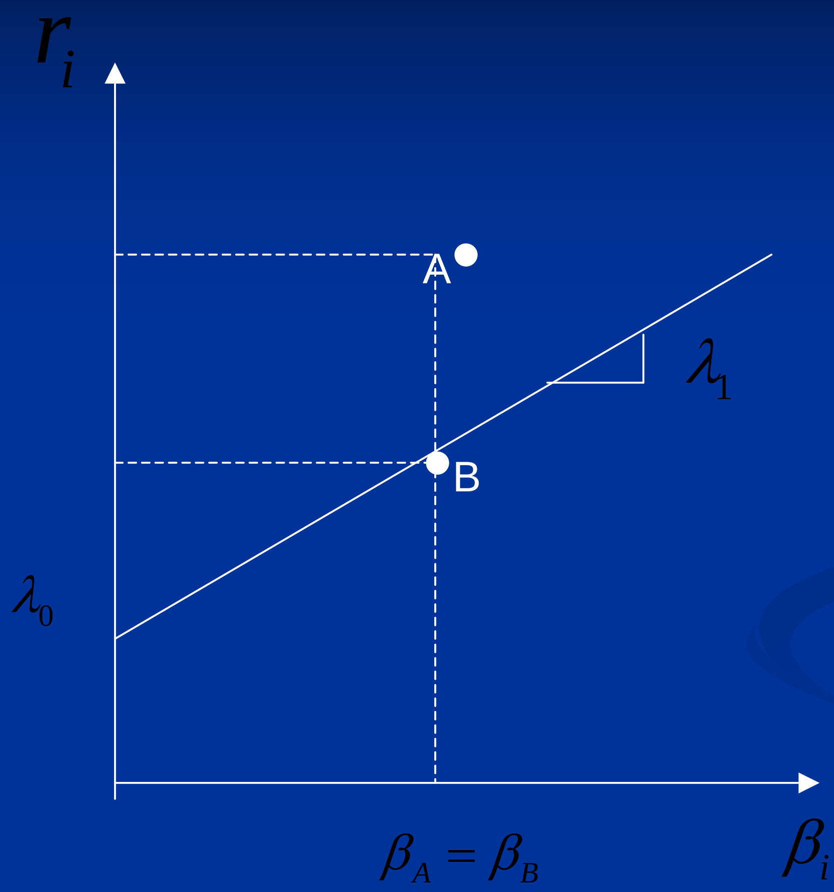
I	预期收益率r_i %	敏感因子b_i
证券1	15	0.9
证券2	21	3.0
证券3	12	1.8

对外经济贸易大学
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

$$0.9x_1 + 3.0x_2 + 1.8x_3 = 0$$
$$15x_1 + 21x_2 + 12x_3 > 0$$

- 套利组合（0.1，0.075，-0.175）
- 买卖行为导致套利机会减少最终消失，如果找不到满足满足预期收益率大于0的资产组合，此时存在非负的常数λ_0 λ_1 ,使得预期回报率和敏感性之间满足如下线形关系

$$\bar{r}_1 = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_1$$
$$\bar{r}_i = r_f + (\delta_1 - r_f)\beta_i$$



单因素资产定价线

$$r_i = r_f + \beta_i(\delta_1 - r_f)$$

举例：多因素套利组合

- 假定证券的回报率可由两个因素模型产生：

$$r_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + e_i$$

4种证券具有如下的预期回报率和敏感性：

i	$\bar{r}_i$	b_{i1}%	b_{i2}
证券1	15	0.9	2.0
证券2	21	3.0	1.5
证券3	12	1.8	0.7
证券4	8	2.0	3.2

$$0.9x_1 + 3x_2 + 1.8x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.7x_3 + 3.2x_4 = 0$$

$$15x_1 + 21x_2 + 12x_3 + 8x_4 > 0$$

- 套利组合(0.1,0.088,-0.108,-0.08)

- 通过购买证券1和2,同时出售证券3和4,使得证券1和2价格上涨，3和4价格下跌,推动市场均衡。即当满足前面三个等式的组合的预期回报率为0,均衡达到。
- 如果找不到满足满足预期收益率大于0的资产组合，此时存在非负的常数λ_0 λ_1 λ_2,使得预期回报率和敏感性之间满足如下线形关系

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{i1} + \lambda_2 \beta_{i2}$$

对外经济贸易大学
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

三、APT与CAPM的联系与比较

- 单因子模型

$$\lambda_1 = (\overline{r_M} - r_f)\frac{\mathrm{cov}(F_1, r_M)}{\sigma_M^2}$$

- 两因子模型

$$\lambda_1 = (\overline{r_M} - r_f)\frac{\mathrm{cov}(F_1, r_M)}{\sigma_M^2}$$

$$\lambda_2 = (\overline{r_M} - r_f)\frac{\mathrm{cov}(F_2, r_M)}{\sigma_M^2}$$

APT和CAPM的比较

- APT与CAPM最根本的区别在于， CAPM是典型的收益/风险权衡所主导的市场均衡， APT特别强调的是无套利均衡原则。
- 无风险套利机会建立市场均衡价格和收益/风险权衡关系建立市场价格均衡关系有着本质区别：收益/风险权衡关系所主导的市场价格均衡，一旦价格失衡，就会有许多投资者调整自己的投资组合来重建市场均衡，但每个投资者只对自己的头寸作有限范围的调整。套利则不然，一旦出现套利机会，每一个套利者都会尽可能大的构筑头寸，因此从理论上来讲，只需少数几位（甚至只需一位 ）套利者就可以重建市场均衡。

- CAPM是典型的收益/风险权衡所主导的市场均衡，每一位投资者都按照自己的收益/风险偏好选择有效组合边界上的投资组合。如果市场组合中的某一项证券价格失衡，资本市场线就会发生移动，所有投资者都会吸纳价植被低估的证券而抛出价值被高估的证券。所以重建市场均衡的力量来自于许多投资者共同行为。

- APT不需要CAPM赖以成立的那些有关市场假设的条件。
- CAPM对证券回报率的分布以及个体的效用函数作出假设，APT假设证券的回报率是由因子模型产生
- 在CAPM中，证券的价格依赖于市场组合的回报率，需要对其进行估计，而APT需要对因子回报率进行估计。