第九章 期权及期权定价模型

主要内容

- 期权市场简介
- 股票期权的价格的特性
- 期权价格的上下限
- 看涨期权与看跌期权的平价关系
- 期权估值的二叉树模型方法
- 股票期权定价的Black-Scholes公式

第一节 期权市场简介

- 期权是指未来的选择权(option), 它赋予期权持有者（购买者或多头）一种权利而不必承担义务，可以按预先敲定的价格购买或者出售一定品质的资产。
- 期权由所要购买或出售的资产衍生出来的，所以期权是一类衍生工具。

- 期权与期货的两个主要区别：

1. 期权赋予持有者做某件事情的权利，但是持有者不一定必须行使权利。而期货合约中多头一方有义务在将来某一确定时刻以某一确定价格买进商品，而看涨期权的持有者则是有权利选择是否在将来某一确定时刻以某一确定价格买进某种商品。
2. 进入期货市场无需成本，然而投资者只有支付了期权费才能得到了一张期权合约。

- 最大的股票期权交易所是芝加哥期权交易所(CBOE)。
- 期权合约的形成

期权的四个特性

- 标的物underlying asset
- 看涨或看跌期权 call option, put option
- 执行价格 Exercise price ,Strike price
- 到期日 Expiration Date

1. American Option
2. European Option

期权的头寸

- 看涨期权的买方
- 看跌期权的买方

期权合约的多头

- **long position**

- 看涨期权的卖方
- 看跌期权的卖方

期权合约的空头

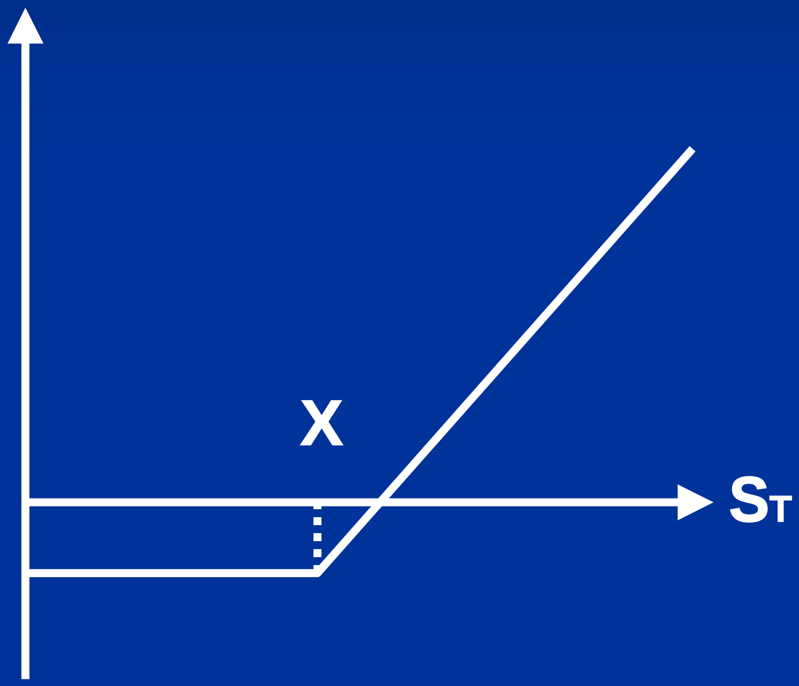
- short position

- 例子
- 看涨期权
- 看跌期权

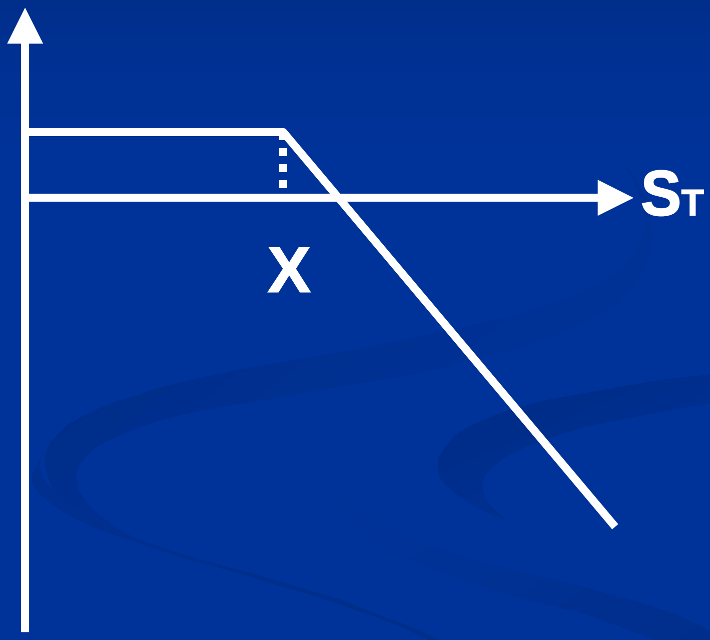
期权的风险特征

- 在忽略交易费用的条件下，期权的多方和空方的损益之和恒等于零，用对策论的术语来说，期权交易是零和博弈
- 期权式单边风险工具，它只保护价格向一个方向变化

期权的风险特征（续）

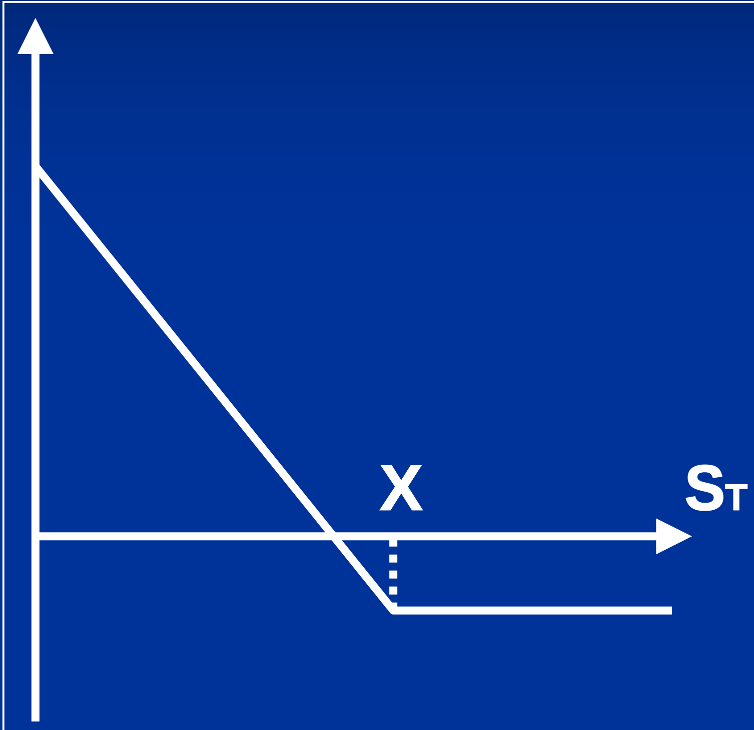


买权多头的风险状况图

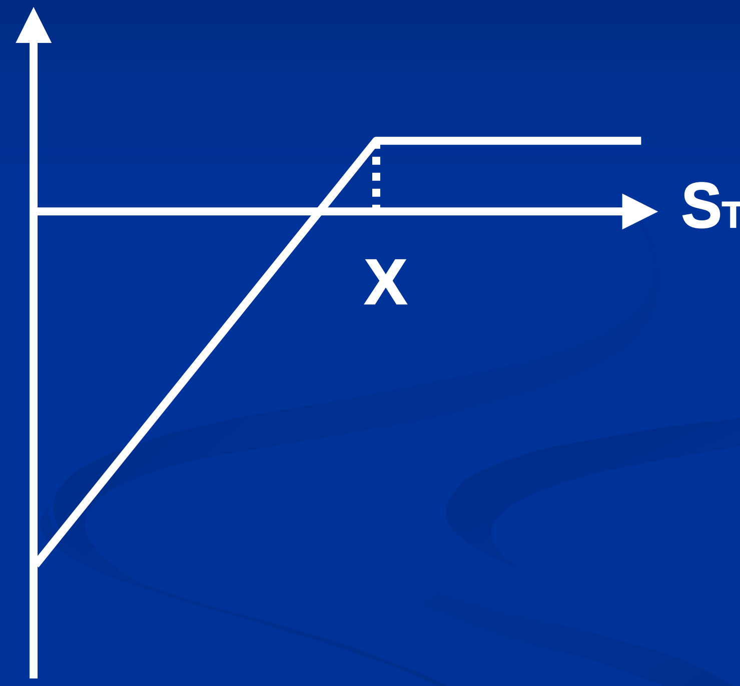


买权空头的风险状况图

期权的风险特征（续）



卖权多头的风险状况图



卖权空头的风险状况图

- 欧式看涨期权多头：$\max(S_T-X,0)$
- 欧式看涨期权空头：
- $-\max(S_T-X,0)=\min(X-S_T,0)$
- 欧式看跌期权多头：$\max(X-S_T,0)$
- 欧式看跌期权空头：
- $-\max(X-S_T,0)=\min(S_T-X,0)$

- 实值期权 in the money option：立即执行期权时，持有期权者具有正的现金流
- 两平期权 at the money option：立即执行期权时，持有期权者具有0的现金流
- 虚值期权 out of the money option：立即执行期权时，持有期权者具有负的现金流

- 内涵价值intrinsic value:期权立即执行时所具有的价值和0这两者的最大值。
- 看涨期权的内在价值：$\max(S_T-X,0)$
- 看跌期权的内在价值： $\max(X- S_T,0)$

交易者类型

- **对冲者（Hedgers）**
- **投机者(Speculators)**
- **套利者(Arbitrageurs)**

期权市场机制

- 期权市场的历史
- 交易:做市商,场内会员经纪人,指令登记员

期权市场的历史

- 早在18世纪，欧洲和美国开始了首批看涨期权和看跌期权的交易。
- 20世纪的前几年，一些公司成立了经纪人与交易者协会(Put and Call Brokers and Dealers Association).——柜台交易(over-the-counter market).
- 缺陷：1。没有二级市场 2。没有担保期权卖者不违约的机制

- 1973.4　芝加哥交易所(CBOT)成立了一个新的交易所——芝加哥期权交易所，特别用来交易股票期权。
- 1975美国股票交易所(AMEX)、费城股票交易所(PHLX)
- 1976 太平洋股票交易所(PSE)

- 80年代
- 外汇期权、股票指数期权、期货期权——美国期权合约
- 外汇期权交易——费城期权交易所
- S&P100和500股票指数期权——芝加哥期权交易所
- NYSE指数期权——纽约股票交易所
- 市场股票指数(Major Market Stock Index)——美国股票交易所

- 80-90年代
- 期权柜台交易市场。交易一方是：投资银行，另一方是投资银行的客户，比如基金经理、大公司的财务总监等。

期权交易

- 做市商market maker
- 场内会员经纪人floor brokers
- 指令登记员the order book official

第二节 股票期权的价格的特性

- 主要讨论影响股票期权价格的一些因素。我们探讨欧式期权价格、美式期权价格和标的资产价格之间的关系。这些关系中最重要的是看涨期权-看跌期权的平价关系。
- 讨论美式看涨期权是否应该提前执行。我们可以证明提前执行不付红利股票美式看涨期权决不是最佳选择，即不分红股票的美式买权不可能提前执行。

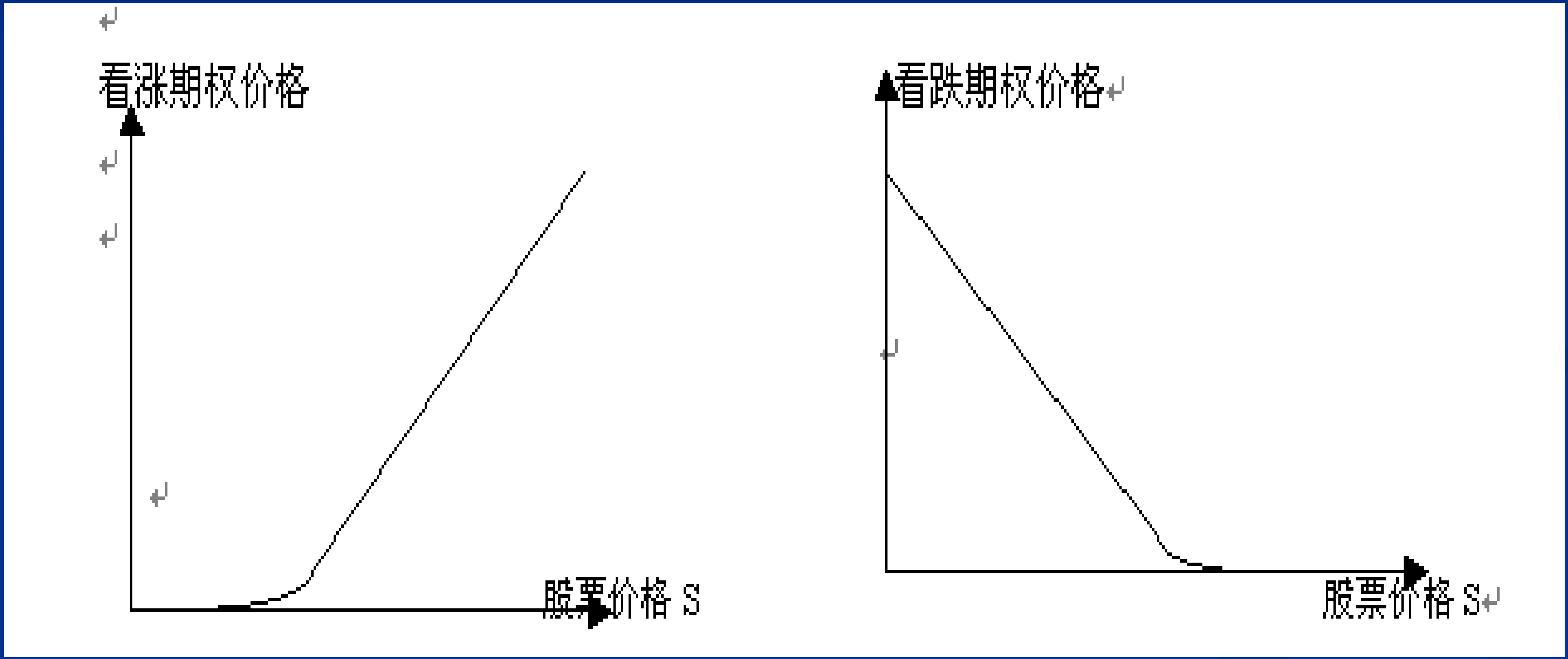
一 影响期权价值的因素：

- 股票的现价S
- 执行价格，X;
- 到期期限，T
- 股票价格的波动率σ;
- 无风险利率r
- 期权有效期内预计发放的红利

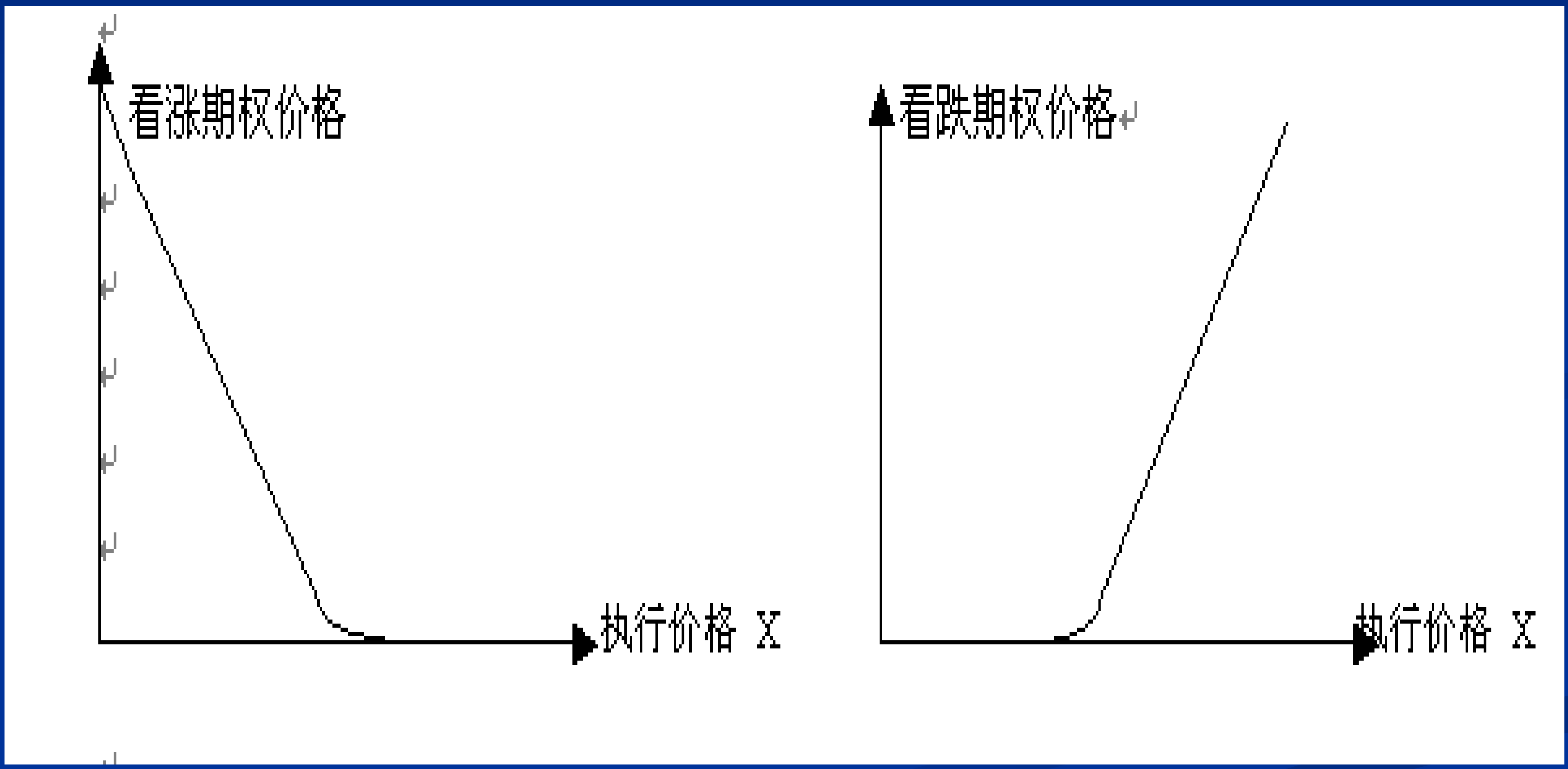
- 股票价格与执行价格

看涨期权 $\max(S_T-X,0)$

看跌期权 $\max(X- S_T,0)$

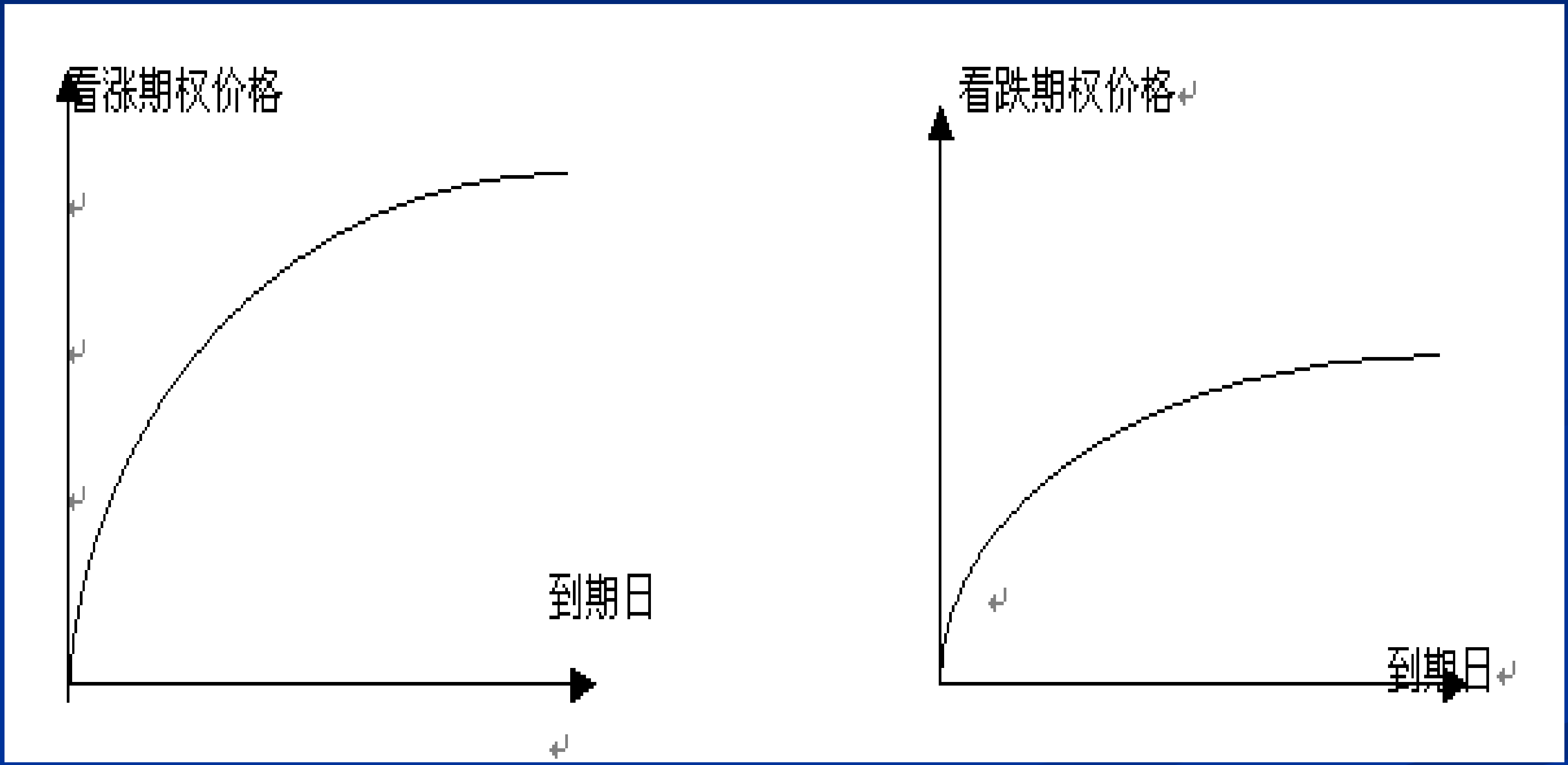


看涨期权价格
股票价格 S
看跌期权价格
股票价格 S


看涨期权价格
执行价格 X
看跌期权价格
执行价格 X

- 到期期限

当期权的到期期限增加时，美式看跌期权和看涨期权的价值都会增加。因为有效期长的期权不仅包含了有效期短的那个期权的所有执行机会，而且他的获利机会会更多。因此有效期长的期权价值总是大于或等于有效期短的期权价值。

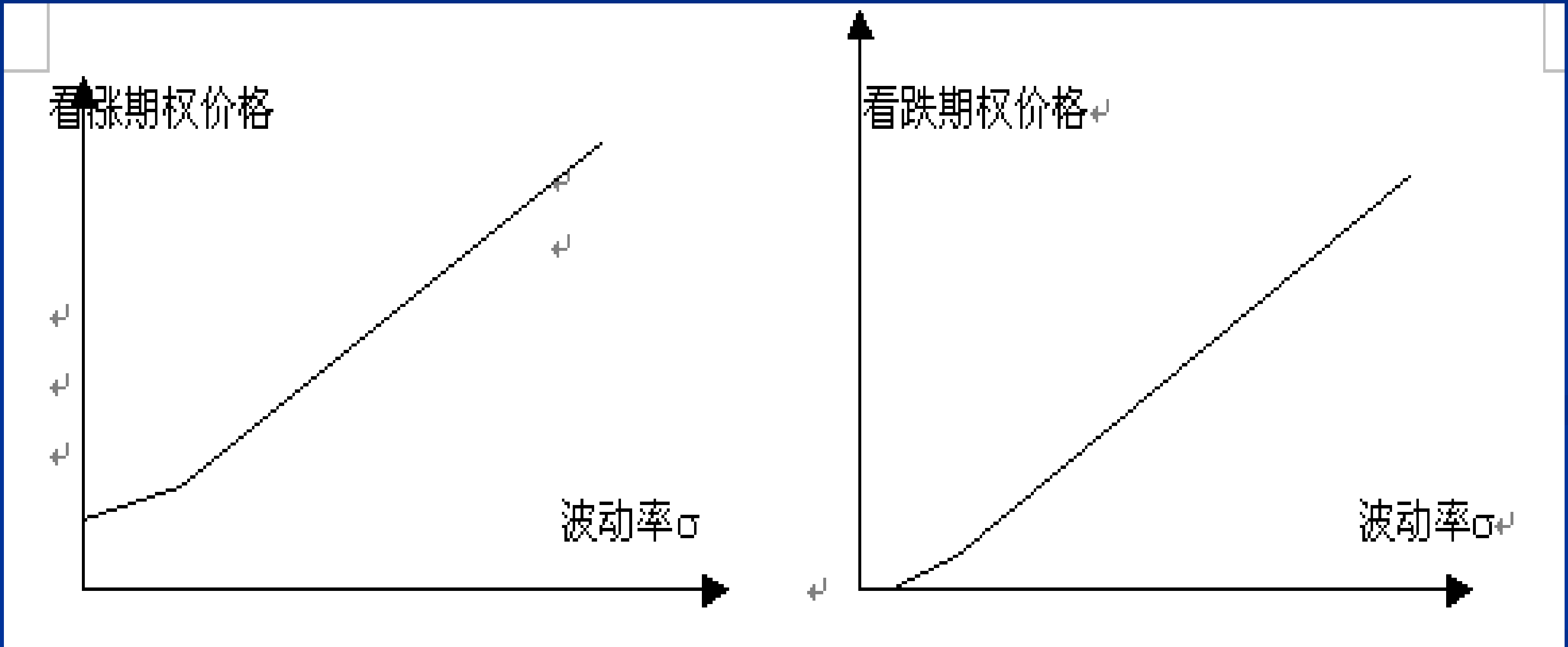

看涨期权价格
到期日
看跌期权价格
到期日

- 随着有效期的增加，欧式看涨期权和欧式看跌期权的价值并不一定增加。
- 考虑同一个股票的两个欧式看涨期权，一个到期期限为1个月，另一个到期期限为2个月。假定预计在6周以后将支付大量的红利，红利会使股票的价格下降，这就有可能使有效期短的期权的价值超过有效期长的期权的价值

- 波动率volatility

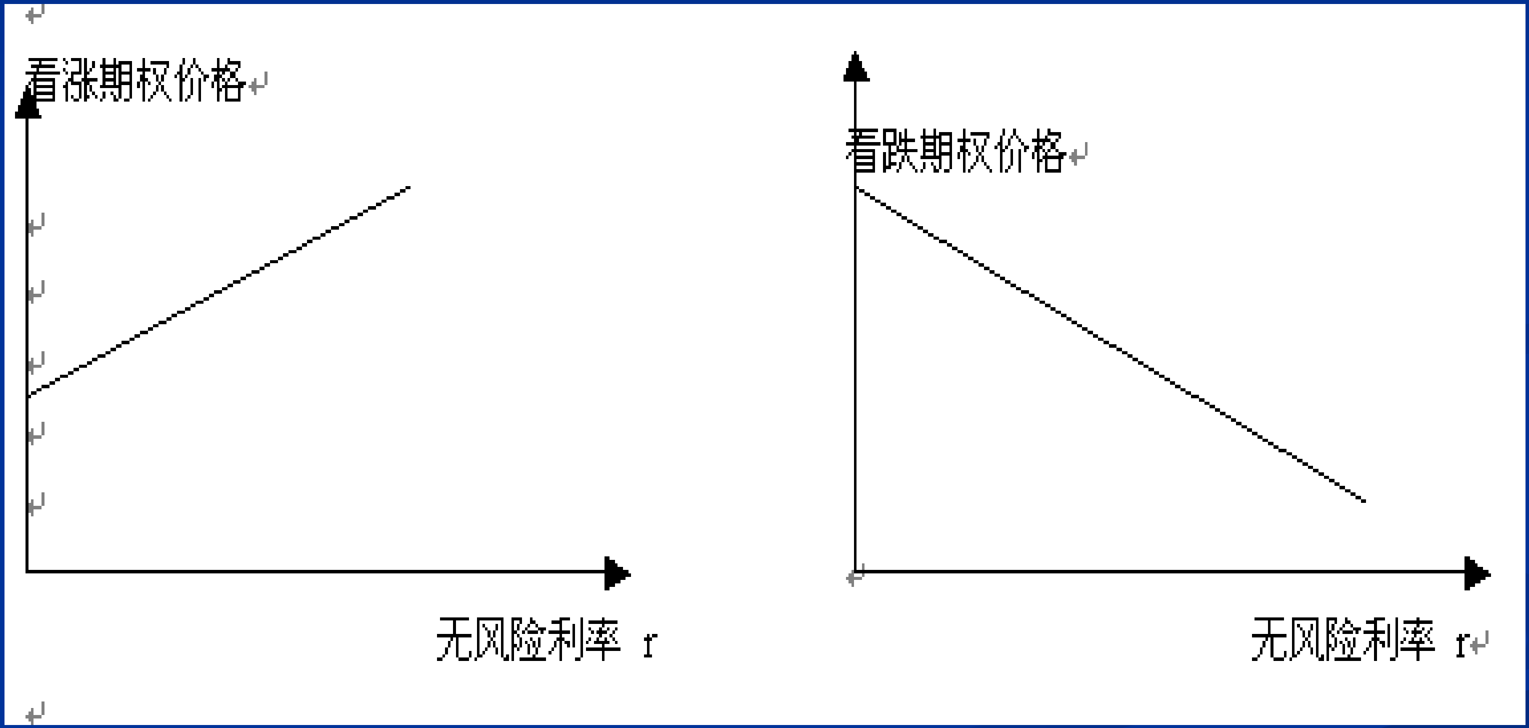
股票价格的波动率是用来衡量未来股票价格变动的不确定性。随着波动率的增加，股票上升很高或下降很低的机会也随着增加。

看涨期权的持有者从股价上升中获利，但是当股价下降时，由于他/她的最大损失就是期权费，他仅有有限的损失。与此类似，看跌期权的持有者从股价下跌中获利，但当股价上升时，仅有有限的损失。因此，随着波动率的增加，看涨期权和看跌期权的价值都会增加。


看涨期权价格
波动率σ
看跌期权价格
波动率σ

- 无风险利率　无风险利率反映了投资者的资金成本（即货币的时间价值）。与直接在股票市场购买股票相比，看涨期权的持有者直到执行合同时才付出现金。显然，**r**越大，这种延迟支付的价值就越高。因此，在其他条件相同时，无风险利率越大，买权的价值就越高。

- 对于看跌期权来说,随着利率上涨，股票价格的预期增长率上涨，但是执行价格不变,降低看跌期权的价值。


看涨期权价格
无风险利率 r
看跌期权价格
无风险利率 r

- 红利

在除息日后，红利将减少股票的价格。对于看涨期权的价值来说，这是一个坏消息，而对于看跌期权的价值来说，则是一个好消息。因此看涨期权的价值与预期红利的大小成反向运动，而看跌期权的价值与预期红利大小成正向运动。

二、期权价格的上下限

- 假设

1. 没有交易费
2. 所有交易利润（减去交易损失后）具有相同的税率
3. 可以按无风险利率借入和贷出资金。
4. 一旦有套利机会出现，市场参与者随时准备利用这些套利机会。

- 符号

S: 股票现价

X: 期权执行价

T: 期权的到期时间

S_T: 在T时刻股票的价格

r: 在T时刻到期的投资的无风险利率（连续复利）

C: 购买一股股票的美式看涨期权的价格

P: 出售一股股票的美式看跌期权的价格

c: 购买一股股票的欧式看涨期权的价格

p: 出售一股股票的欧式看跌期权的价格

- 期权价格的上限

1. 股票价格是期权价格的上限：

$$S \geq c, S \geq C.$$

如果不存在这一关系，则套利者购买股票并卖出看涨期权，可轻易的获得无风险利润。

2. 美式看跌期权或欧式看跌期权的持有者有权以X的价格出售一股股票：

$$X \geq p, \quad X \geq P.$$

3 欧式看跌期权，在T时刻，期权的价值不会超过X. 所以有：

$$Xe^{-rT} \geq p.$$

如果不存在这一关系，则套利者出售期权并将所得收入以无风险利率进行投资，可轻易的获得无风险收益。

不付红利的看涨期权的下限

- 不付红利的欧式看涨期权的下限是：$S-Xe^{-rt}$

例子 假定S＝20美元，X＝18美元，r＝10％，T＝1年。则期权的下限为：

$$S-Xe^{-rt}=20-18e^{-0.1}=3.71$$

组合A：　一个欧式看涨期权加上金额为 Xe^{-rT} 的现金

- 组合B：　一股股票

$$c \geq \max(S - Xe^{-rT}, 0)$$

不付红利的欧式看跌期权的下限

- 对于一个不付红利股票的欧式看跌期权来说，其价格下限为：
- $$Xe^{-rT}-S$$
- 例子： 假定S＝37美元，X＝40美元， r＝5％年率， T＝0．5年。

$$Xe^{-rT}-S$$

$$=40e^{-0.05*0.5}-37$$

$$=2.01\text{美元}$$

对外经济贸易大学
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

- 组合C：一个欧式看跌期权加上一股股票
- 组合D：　金额为 Xe^{-rT} 的现金

$$p \geq \max(Xe^{-rT} - S,\ 0)$$

三、看涨期权与看跌期权的平价关系

组合A：　一个欧式看涨期权加上金额为Xe^{-rT}的现金

- 组合C：　一个欧式看跌期权加上一股股票
- 在期权到期时，两个组合的价值均为：

$$\max(S_T, X)$$

- 欧式期权在到期日前不能提前执行。因此当前该组合也必须具有相等的价值

$$c + Xe^{-rT} = p + S$$

- 这就是看涨和看跌期权之间的平价关系（**put-call parity**）.
- 具有某一确定执行价格和到期日的欧式看涨期权的价值可根据相同执行价格和到期日的欧式看跌期权的价值推导出来。

- 例子　假定股票价格为３１美元，执行价格为３０美元，无风险年利率为１０％，３个月期的欧式看涨期权的价格为３美元，３个月期的欧式看跌期权的价格为２．２５美元，此时，
- $c+Xe^{-rT}=3+30e^{-0.1*0.25}=32.26$美元
- $p+S=2.25+31=33.25$美元
- 相对于组合Ａ来说，组合Ｃ被高估了。正确的套利策略是买入组合Ａ中的证券并卖空组合Ｃ中的证券。这包括买入看涨期权，卖空看跌期权和股票。

- 在另一种情况下，如果假定看涨期权的价格为 3 美元而看跌期权的价格为 1 美元。此时，
- $c+Xe^{-rT}=3+30e^{-0.1*0.25}=32.25$ 美元
- $p+S=1+31=32.00$ 美元
- 相对于组合 C 来说，组合 A 被高估了。套利者可以卖空组合 A 中的证券并买入组合 C 中的证券来锁定利润。这个策略包括卖出看涨期权，买入看跌期权和股票。

提前执行不付红利美式看涨期权是不明智的

- 组合 E:一个美式看涨期权加上金额为 Xe^{-rT} 的现金
- 组合 F:一股股票
- 结论：C=c>S-X

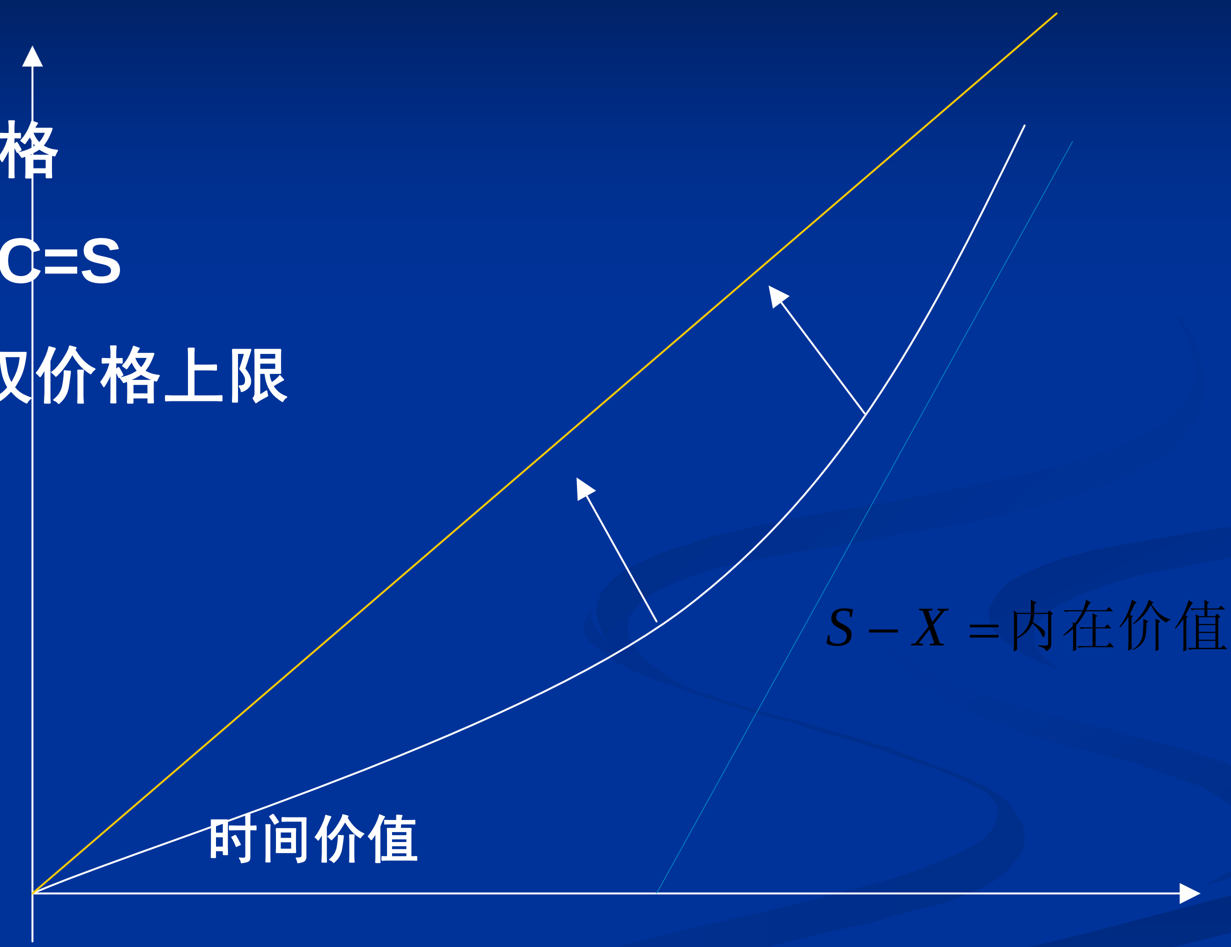
- 看涨期权不应提前执行的原因之一是由于期权提供保险。当持有看涨期权而不是股票本身时，看涨期权持有者在股票价格下跌到执行价格之下时不受损失。一旦期权被执行，股票价格取代了执行价格，这种保险也就消失了。

看涨期权的价格曲线

- 期权价格等于内在价值加上时间价值。
- 时间价值是期权费中超过内在价值的那部分。
- 内在价值取决于S,X,而时间价值取决于r,波动率和到期时间。

看涨期权的价格曲线

- 看涨期权价格
- c=C=S
- 期权价格上限
-
-



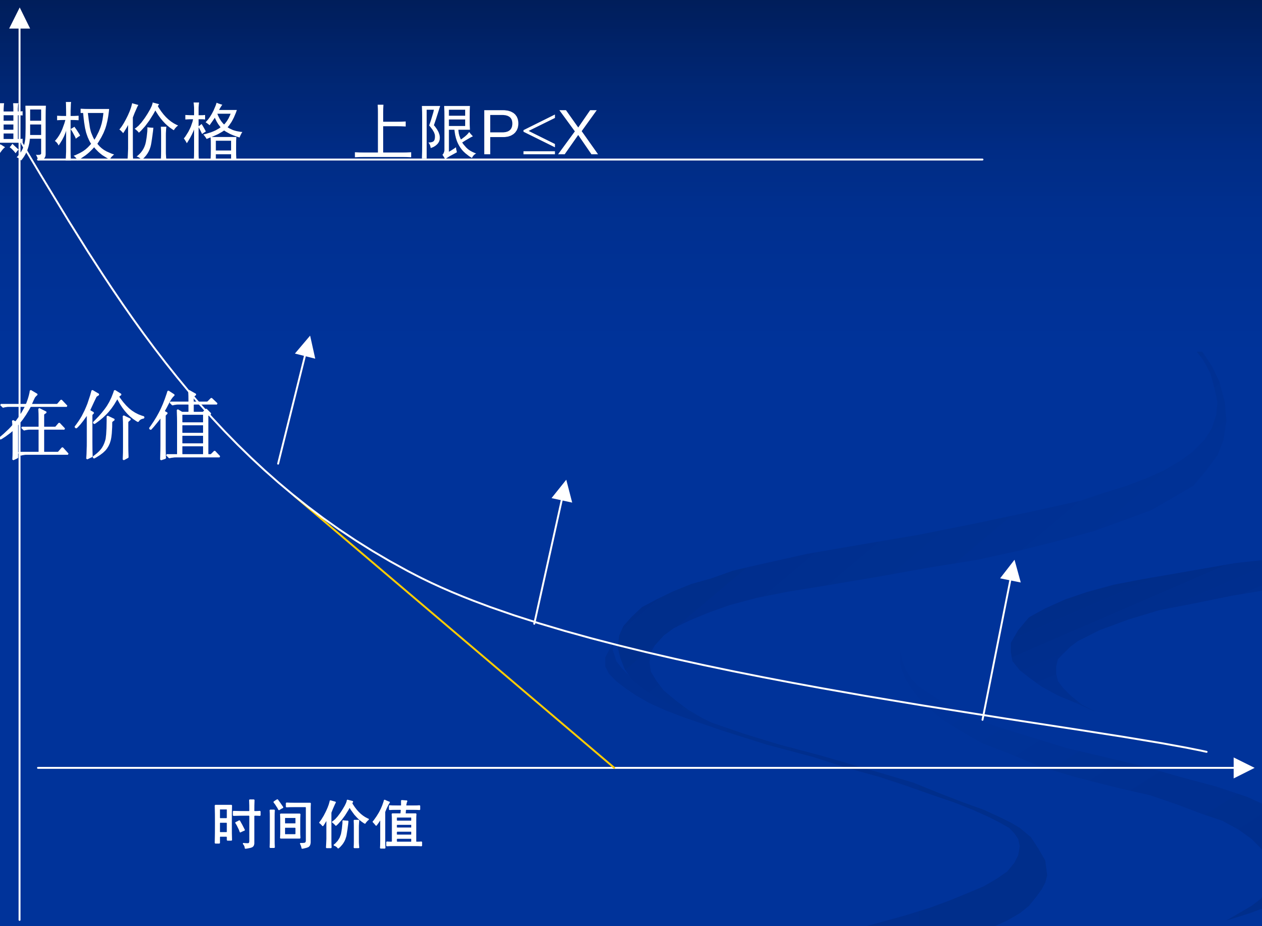
-
-
- X 股价

不付红利的美式看跌期权可能提前执行

- 组合 G:一个美式看跌期权加上一股股票
- 组合 H:金额为 Xe^{-rT} 的现金

- 美式看跌期权价格　　上限P≤X
- X

X-S 内在价值



- 时间价值
- X　　　股票价格

美式看涨和看跌期权的关系

- 组合I:一个欧式看涨期权加上金额为X的现金
- 组合J:一个美式看跌期权加上一股股票

$$S - X < C - P < S - Xe^{-rT}$$

- 考虑不付红利股票的美式看涨期权,执行价格为20美元,到期期限为5个月，期权价格为1.5美元.假定股票现价为19美元,无风险利率为10%.则
- 1 具有同一股票相同执行价格到期期限的欧式看跌期权的价格为多少?
- 2具有同一股票相同执行价格到期期限的美式看跌期权的价格在什么范围内变化?

红利的影响

- 1 欧式看涨期权和看跌期权的下限:

$$c > S - D - Xe^{-rT}$$

$$p > D + Xe^{-rT} - S$$

- D表示在期权有效期内红利的现值

- 2 在红利的影响下,美式看涨期权有可能提前执行.
- **3 看涨与看跌期权的平价关系**

$$S - D - X < C - P < S - Xe^{-rT}$$

实证研究

- 难度

1. 确保精确的同时观测股票价格和期权价格是非常重要的。例如，通过观察每天最后交易的价格来验证是否存在套利机会是不适当的。
2. 详细考虑投资者是否已利用可观测到的套利机会，是非常重要的。如果套利机会仅存在于片刻时间，在实践中，可能没有办法来发现它。

3. 当决定是否可能有套利机会时，必须考虑交易费用。
4. 看涨和看跌期权之间的平价关系仅适用于欧式期权。而场内交易的股票期权是美式期权。
5. 必须估计期权有效期内支付的红利

- Bhattacharya的研究检验了实践中看涨期权的理论上的下限值是否适用。他使用的数据包括1976年8月到1977年6月196天期间58种股票得期权交易价格。首先验证是否满足期权价格大于内涵价值的条件，即C是否大于max(S-X,0)。观察了86000个期权价格，发现大约有1.3%偏离了该条件。这些偏离中的29%经过下一场交易，偏离消失。这表明在实际中投资者不可能利用这一偏离。当考虑交易费时，偏离所造成的获利机会将消失。

- Bhattacharya接着验证了期权的售价是否低于其下限，即是否低于$S-D-Xe^{-Rt}$，通过观察，它发现确实有7.6%的售价低于下限，然而当考虑交易费时，就不存在获利机会了。

- Klemkosky和Resnick根据1977年7月至1978年6月之间交易得期权的价格的数据来验证看跌期权与看涨期权之间的平价关系。他们用以上数据做了一系列的验证，以确定期权提前执行的可能性以及提前执行有利可图而被放弃了的数据。通过这项研究，他们得出的结论是：在他们的观测期内，有些交易者是可以利用套利机会获利的，尤其是市场的做市商。

小结

- 股票多头+看涨期权空头⇔ 看跌期权空头
- 股票空头+看涨期权多头 ⇔看跌期权多头
- 股票多头+看跌期权多头⇔ 看涨期权多头
- 股票空头+看跌期权空头 ⇔看涨期权空头

$$p+S=c+Xe^{-rT}$$

第三节 期权定价的二叉树模型

- 为股票期权定价的一个有用的和很常见的方法是构造所谓的二叉树图（binomial tree）。这个树图表示了在期权有效期内股票价格可能遵循的路径。
- J. C. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein 1979 最基本期权定价方法之一

单步二叉树模型

- 例子：假设一种股票当前价格为20美元，3个月后的价格可能为22美元或18美元。假设股票不付红利，我们打算对3个月后以21美元的执行价格买入股票的欧式看涨期权进行定价。若到时股票价格为22美元，期权的价值将是1美元；若股票价格为18美元，期权的价值将是0。假设无风险利率为12%。

一般结论

- 考虑一个无红利支付的股票，股票价格为S，基于该股票的某个期权的当前价格为f。
- 假设期权的有效期为T，并且在期权有效期内，股票价格或者从S向上变动到一个新的水平Su，或者S向下变动到新的水平Sd($u>1,d<1$)，当股票价格向上变动时，股票价格增长的比率为u-1;当股票价格向下变动时，股票价格减少的比率为1-d。如果股票价格变动到Su,我们假设期权的收益为f_u, 如果股票的价格变动到Sd, 我们假设期权的收益为f_d.

$$f=e^{-rT}[pf_u+(1-p)f_d] \qquad （2）$$

- 其中

$$p=\frac{e^{rT}-d}{u-d}$$

- **p解释为股票价格上升的概率。1-p就是股票价格降的概率。**
- **期权的价值是其未来预期值按无风险利率贴现的值。**

风险中性定价

- 当上升变动的概率为p时，我们考察一下股票的预期收益。在T时刻预期的股票价格由下式表示：

$$E(S_T) = pSu + (1-p)Sd$$

$$E(S_T) = pS(u-d) + Sd$$

$$E(S_T) = Se^{rT}$$

- 该式说明股票价格以无风险利率增长，因此假定股价上升的概率等于p等价于股票收益等于无风险利率

- 理性的投资者一般都被认为是风险厌恶的，要他们接受风险一定要给予风险补偿，因此，在有风险资产的预期收益率里，都包含风险的补偿。对风险厌恶程度越大,要求的风险补偿也就越高。如果一个问题的分析与市场参与者的风险偏好无关,也就无所谓风险补偿问题。于是，对衍生产品定价，给出风险中性假设:

- 风险中性假设：　如果对一个问题的分析过程与投资者的风险偏好无关,则可以将问题放到一个假设的风险中性的世界里进行分析。所得结果在真实世界里应当成立。

- 在一个假想的风险中性世界里，所有的市场参与者都是风险中性的,所有资产不论其风险大小或者是否有风险,预期收益率都相同，等于无风险收益率.
  而且所有资产现在的均衡价格都等于其未来收益的预期值按无风险利率折现后的现值.

- 风险中性定价原理：任何基于其他交易证券的衍生产品都可以在投资者是风险中性的假设下定价：

1. 所有证券的预期收益率为无风险利率
2. 无风险利率是任何预期的未来现金流的最合适的折现率

- 风险中性定价步骤：

1. 假设标的资产的预期收益率为无风险利率,计算风险中性概率.
2. 计算期权或衍生产品在到期日的预期收益
3. 以无风险利率将预期收益折现

- 假定风险中性世界里股票上升的概率为P,由于未来期望收益按无风险利率贴现的现值必须等于该股票目前的价格，因此风险中性概率可通过下式求出:

$$S = e^{-rT}(SuP + (1-P)Sd)$$

$$P = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

$$f = e^{-rT}[Pf_u + (1-P)f_d]$$

举例

- 已知股票现价为20美元，3个月末股票价格可能上涨到22美元或下降到18美元。本例考虑的期权是一份执行价格为21美元，有效期为3个月的欧式看涨期权。无风险利率是12%。
- 计算步骤：
  - 计算出风险中性概率
  - 计算出风险中性条件下期权未来价值
  - 把期权未来的价值按照无风险利率折现

$$p=\frac{e^{rT}-d}{u-d}$$

两步二叉树

- 例子：初始股票价格为20美元，并在两步二叉树的每个单步二叉树图中，股票价格可以上升10%或者下降10%。我们假设每个单步二叉树的步长是3个月，无风险利率是12%。我们考虑一个执行价格是21美元的期权。

一般结论

- 初始股票价格为S美元，并在两步二叉树的每个单步二叉树图中，股票价格可以上升到初始值的u倍或者下降到初始值的d倍，我们假设每个单步二叉树的步长是T，无风险利率是r。

$$f_u = e^{-rT}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$$

$$f_d = e^{-rT}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}]$$

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$$

$$f = e^{-2rT}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

- 变量p^2,$2p(1-p)$,$(1-p)^2$是股价达到最后上、中、下三个节点的概率。
- 推广到任意有限步(step)，风险中性定价的原理一直成立。**期权的价格总是等于它在无风险中性世界的预期收益按无风险利率贴现的值。**

用二叉树为美式期权定价

- 为美式期权定价，方法是从树图的最后末端向开始的起点倒推计算，在每个结点要检验 提前执行是否最佳.

- 一个看跌期权的例子

考虑一个两年期权看跌期权，执行价格为52美元，当前价格为50美元。我们假设价格为两步二叉树，每个步长为一年。在每个单步二叉树中股票价格或者按比率上升20%，或者按比率下降20%。我们也假设无风险利率为5%。则看跌期权的价值是多少？

第四节
布莱克-苏尔斯期权定价模型

- 证券价格的变化过程
- 布莱克-苏尔斯期权定价模型
- 布莱克-苏尔斯期权定价模型缺陷

- 期权定价是一件非常具有挑战性的任务。在20世纪的前面70多年里，众多经济学家做出无数努力，试图解决期权定价的问题，但都未能获得令人满意的结果。在探索期权定价的漫漫征途中，具有里程碑意义的工作出现在1973年——金融学家F. Black与M. Scholes发表了“期权定价与公司负债”的著名论文
- 该论文推导出了确定欧式期权价值的解析表达式——Black-Scholes欧式期权定价公式，探讨了期权定价在估计公司证券价值方面的应用，更重要的是，它采用的动态复制方法成为期权定价研究的经典方法
- M. Scholes主要因为这一工作与R. Merton一道荣膺了1997年的诺贝尔经济学奖

弱式有效市场假说和马尔可夫过程

- 1965 Fama 有效市场假说
  - 弱式有效市场假说
  - 半强式有效市场假说
  - 强式有效市场假说

有效市场假说

- 投资者都力图利用可获得的信息获得更高的报酬;证券价格对新的市场信息的反应是迅速而准确的,证券价格能够完全反应全部信息。市场竞争使得证券价格从一个均衡水平过度到另一个均衡水平,各次新信息带来的价格变动相互之间独立。

- 弱式有效市场假说： 证券价格变动的历史不包含任何对预测证券价格未来变动有用的信息，也就是说不能通过技术分析来获得超过平均收益的收益.
- 半强式有效市场假说：证券价格会迅速准确的根据可获得的所有公开信息调整,因此以往的价格和成交量等技术面信息以及已公布的基本面信息都无助于挑选股票
- 强式有效市场假说：不仅是已公布的信息，而且是可能获得的有关信息都反映在股价中，因此任何信息对挑选证券没有用处

- 发达国家的证券市场大体符合弱式有效市场.
- 弱式有效市场可用马尔可夫随机过程Markov Stochastic Process表述

马尔科夫过程(Markov Stochastic process)

- 无记忆性：只有变量的当前值才与未来预测有关,变量过去的历史和变量从过去到现在的演变方式与未来预测无关
- 如果股价过程是马尔科夫过程，那么股价在未来某时刻的概率分布不依赖于股价过去的路径,只取决于该证券现在的值
- 股价过程是马尔科夫过程等价于股票市场的弱有效性

Wiener过程(布朗运动)——定义

1　标准布朗运动：Δt 代表一个小的时间间隔长度

Δz 代表变量z在Δt 时间内的变化

若Δz 遵循标准布朗运动，则 Δz满足两种特征

1 Δz和 Δt满足　$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$

ε 服从标准正态分布

2 对于任意两个不同时间间隔 Δt, Δz 互相独立。

- 显然　　服从正态分布，均值为0，标准差为 $\sqrt{\Delta t}$
- 标准布朗运动就是马尔科夫过程的一种特殊形式

- Wiener过程(长时间段内)的增量

$$z(T)-z(0)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

$$N=T/(\Delta t)$$

- 在任意长度的时间间隔T中，遵循标准布朗运动的变量的变化值服从均值为0，标准差为 $\sqrt{T}$ 的正态分布。
- 标准布朗运动:

$$\Delta t\to 0, dz=\varepsilon\sqrt{dt}$$

普通布朗运动

- 漂移率Drift Rate:单位时间内变量z均值的变化
- 方差率Variance Rate:单位时间变量z的方差
- 标准布朗运动的飘移率为0,方差率为1.漂移率为0意味着未来任意时刻z的均值都等于当前值，方差率为1意味着在一段长度为T的时间后，z的方差为T*1.

- 变量x的普通布朗运动：

$$dx = adt + bdz$$

- a为漂移率，b^2为方差率
- dz遵循标准布朗运动
- adt为确定项，表明x的期望漂移率为每单位时间为a. bdz为随机项，为维纳运动的b倍。

Ito引理

- x是Ito过程，如果

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

- Ito引理：若x遵循伊藤过程， G是x与t的函数，则

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

因此，G也是Ito过程

股价过程

- 证券价格的变化可以用漂移率为μS,方差率为σ^2S^2的伊藤过程来表示:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

- 两边同除以S,得到
- $\dfrac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$ 几何布朗运动
- 衍生证券的价格G应遵循如下过程:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$$

股价过程——对数正态分布

- 证券价格的对数lnS的变化所遵循的随机过程:

$$\ln S_T - \ln S \qquad \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

- 证券价格的变化服从对数正态分布

BSM随机微分方程——假设

- 股价过程为Ito过程
- 卖空无限制
- 没有交易成本、税收，证券是无限可分的
- 衍生工具在到期之前不产生红利
- 不存在套利机会
- 证券可以连续交易
- 所有期限的无风险利率同为常数

BSM随机微分方程——推导

- f表示股票衍生工具的价值，则它是股价与时间的函数

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

- 离散形式

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z$$

BSM随机微分方程——推导

- 由于股价过程与衍生工具价格过程中的随机部分是相同的，因此，通过选择股票与衍生工具的适当组合可以消除掉Wiener过程。
  - 1个单位衍生工具空头，Π 份股票多头 $\frac{\partial f}{\partial S}$
- 把上述投资组合的价值记作

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

- Δt时间后

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

BSM随机微分方程——推导

- 组合的价值不包含随机部分，因此是瞬时无风险的

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f+\frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

- $$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$
- 著名的B-S微分方程
- 股票衍生工具都满足上述方程，不同工具的差异体现在边界条件上
  - 欧式买权：当t=T时， $f=\max\left(S-X\right)$
  - 欧式卖权：当t=T时， $f=\max\left(X-S\right)$

对外经济贸易大学 UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

布莱克-苏尔斯期权定价模型

- **Black-Sholes 期权定价模型**

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$p = Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

期中N(.)是累计正态分布函数，

$$d_1 = \frac{\log(S/X) + (r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

说明

1. 应该注意S随t变化，$\frac{\partial f}{\partial s}$也会变化，所以上述投资组合的价值并不是永远无风险的，只是在一个小的间间隔中才无风险，因此需要不断的调整证券的量才能保持动态无套利均衡。
2. 上述公式是对基于不付红利股票的欧式看涨、看期权定价。

3. 由于美式看涨期权价格和欧式看涨期权价格相等，所以这个公式也给出了基于不付红利股票的美式看涨期权的价值

4. 对于基于不付红利股票的美式看跌期权，不能给出确切的表达式。

欧式期权定价——轶事

- 巧合的是，国际上第一个期权交易所——芝加哥期权交易所于1973年4月底挂牌营业，略早于B-S公式的正式发表（5-6月号）
- 两位作者最先把论文投给JPE，遭到了编辑的拒绝，而且没有得到审稿意见。拒绝的理由：
  - 金融太多，经济学太少
- 他们于是向*经济学与统计学评论*投稿，同样在没有得到审稿意见的情况下遭到拒绝
- 在芝加哥人E. Fama和M. Miller与JPE杂志的编辑打了招呼以后，JPE才最终发表了这篇论文。这一番波折导致他们检验B-S公式的论文发表在先

布莱克-苏尔斯期权定价模型的实证研究与应用

- 实证研究
- 布莱克-苏尔斯期权定价模型的应用

布莱克-舒尔斯期权定价公式实证研究

- 精度问题：运用B-S公式计算出期权价格的理论值，然后与市场上的期权价格进行比较，如果不存在显著的差别，这个定价公式的精确程度应该是令人满意的

实证研究结果

- 布莱克-舒尔斯研究发现：定价公式倾向高估方差高的期权，低估方差低的期权
- 盖尔特等也得出类似结论，且布莱克-舒尔斯期权定价公式高估实值期权的价格，低估虚值期权的价格
- 开勒斯等发现，改变波动率的估计会提高布莱克-舒尔斯期定价公式在预测实际价格时的表现

与实际价格偏差的原因

- 计算错误
- 期权市场价格偏离均衡
- 使用的参数错误
- 布莱克-舒尔斯期权定价公式建立在众多的假设基础上

B-S公式的应用

- 评估组合保险成本
- 给可转换债券定价
- 为认股权证估值

评估组合保险成本

- 证券组合保险是指能够确定的最大损失的投资策略。如在持有相关资产的同时买入看跌期权就是一种组合保险。
- 假设你掌管着价值1亿元的股票投资组合，这个股票投资组合与市场组合十分类似。你担心类似于1987年10月19日的股灾会吞噬你的股票组合，这时购买一份看跌期权是合理的。

- 期权的执行价格越低，组合保险的成本也就越小，过，到底保险成本究竟是多少比较合理呢？
- 运用B-S公式，我们可以评估保险成本。假如10%的损失可以接受，那么执行价格就可以设为9000万，然后将利率、波动率和保值期限的数据代进公式，可以计算合理的保值成本。

给可转换债券定价

- 可转换债券是一种可由债券持有者转换成股票的债券，因此可转换债券相当于一份普通公司债券和一份看涨期权的组合。

$$V_{CB} = V_B + V_C$$

- 可转换债券的价值=从可转换债券剥离出来的债券价值+从可转换债券剥离出来的期权的价值。

- 实际中V_C很难估计。虽然可以用B-S对其进行估计，但是要注意这个公式假定无风险利率不变，这不符合实际。并且从可转换债券中隐含的期权的执行与否会因为股票股利和债券利息的问题复杂化。再次，许多可转换债券的转换比例会随时间变化。
- 另外绝大多数可转换债券是可赎回的，可赎回债券的分解更加复杂。相当于一份普通的公司债券，一份看涨期权多头（转换权）和一份看涨期权空头（赎回权）的组合。

为认股权证估值

- 认股权证是与债券或优先股一起发行的，它的持有人在特定时间以特定价格认购一定数量的普通股的权利，因此认股权证其实是看涨期权。
- 但是需要注意两者之间有差别，看涨期权执行时，发行股票的公司不会受到影响，而认股权证的执行将导致公司发行更多的股票。估价时需要考虑到这点。

布莱克-苏尔斯期权定价模型缺陷

- 交易成本的假设
- 波动率为常数的假设——波动率实际上是随机变量。解决方法：从期权价格的隐含波动率中获取波动率信息，来为期权定价。二。从标的资产市场出发获取波动率变化过程的信息
- 不确定的参数：利率，红利，波动率
- 资产价格的连续变动：跳跃模型和崩盘模型