對外經濟貿易大學
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

第五章 单因素模型与多因素模型

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i$$

$$r_p = a_p + \beta_{p1} F_1 + \beta_{p2} F_2 + \varepsilon_p$$

$$a_p = \sum_{i=1}^{N} w_i a_i$$

$$\beta_{p1} = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_{i1}$$

$$\beta_{p2} = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_{i2}$$

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \varepsilon_i$$

- 教学目的及要求

1、掌握因素模型是根据收益生成过程通过回归分析建立的收益和风险关系的资产定价模型

2、认识因素模型与资本资产定价模型的关系

3、了解因素模型是实践中具有操作性的替代资本资产定价模型的测定风险和收益关系的模型

- 重点内容：

掌握因素模型的生成性质及实际运用

第一节 单因素模型

第二节 资本资产定价模型与因素模型

第三节 多因素模型

第一节 单指数（SIM）模型

一、单指数模型的估计

二、单指数模型的一般形式

三、单指数模型中的系统风险与非系统风险

- 因素模型由威廉.夏普在1963年提出.它是是描述证券收益率生成过程的一种模型，建立在证券关联性基础上。认为证券间的关联性是由于某些共同因素的作用所致，不同证券对这些共同的因素有不同的敏感度。这些对所有证券的共同因素就是系统性风险。因素模型正是抓住了对这些系统影响对证券收益的影响，并用一种线性关系来表示。

- 因素模型中的因素常以指数形式出现（如GNP指数、股价指数、物价指数等），所以又称为指数模型。
- 单因素模型相对CAPM是为了解决两个问题，一是提供一种简化地应用CAPM的方式；二是细分影响总体市场环境变化的宏观因素，如国民收入、通胀率、利率、能源价格等具体带来风险的因素因素模型

一、单指数模型的估计

以回归分析得单因素模型

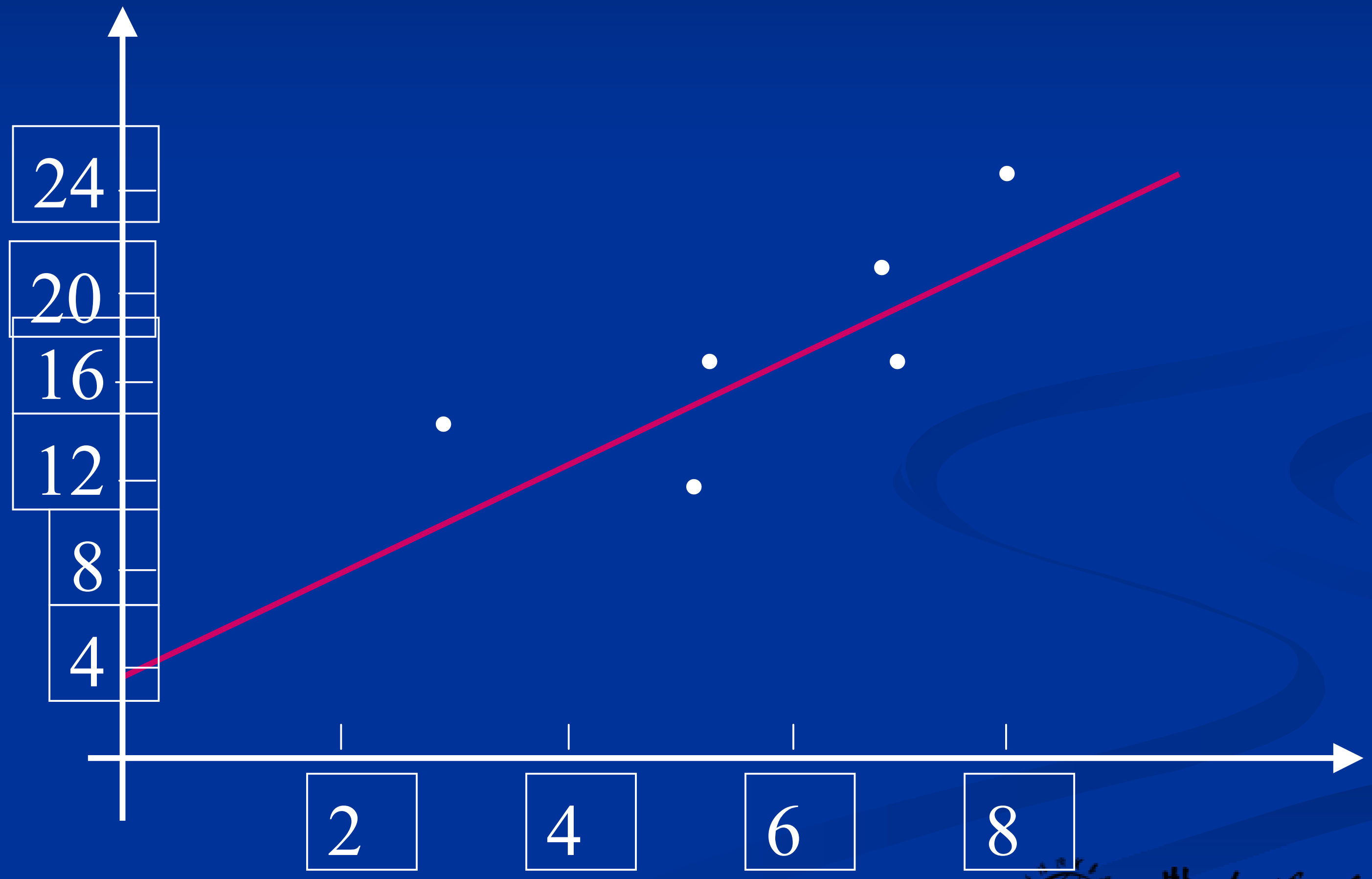
假设证券的回报率生成过程仅包含一个因素，例如认为证券的回报率与预期国内生产总值的增长率有关，那么预期国内生产总值与证券回报率之间的关系如下：

- 假设先考虑经济增长GDP对公司之股票收益率的影响，即只考虑GDP变化对风险补偿的影响。

历史数据库

年	GDP增长率（%）	证券收益率（%）
1	5.7	14.3
2	6.4	19.2
3	7.9	23.4
4	7.0	15.6
5	5.1	9.2
6	2.9	13.0

- 这一关系也可用下面的散点图或拟合直线表示



- 为了阐明图中所反映的数量关系，我们使用一元回归分析的统计技术做一条直线来拟合图中的点。那么，图中这条直线的回归方程则为R_i=4%+2GDP
- 回归方程和直线都表示较高预期的GDP与较高的证券收益率相关联。
- 任一给定证券的实际回报率由于含有非因素回报率的缘故而位于拟合直线的上方或下方。因此对例中的单因素模型多反映的关系的完整描述为：

$$r_i = 4\% + 2GDP + \varepsilon_i$$

$$R_i = \alpha_i + \beta_i G + \varepsilon_i$$

- 从方程中我们可以看出，任何一个证券的收益由三部分构成：

- α_i是宏观因素期望变化为零时的收益，是投资者对证券的期初收益；
- $\beta_i G$系统性风险收益，即随整个市场运动变化不确定性（非预期的）的收益，且变化的敏感度是β_i；
- ε_i是与国内生产总值无关因素的作用，是非系统性风险收益，即只与单个证券相关的非预期事件形成的非预期收益。

二、单因素模型的一般形式

一般地，单因素模型认为有一个因素F对证券收益产生广泛影响，这种影响力通过对每种证券i在任意时期t的建立如下方程来反映：

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i F_t + \varepsilon_{it}$$

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i F_t + \varepsilon_{it}$$

- R_{it} 是证券i在t时期的收益率,
- F_t 是宏观因素在t期的值,
- β_i 是证券i对宏观因素的敏感度,
- ε_{it} 是一个均值为零的随机变量，是回归方程的残差项。
- α_i 是当宏观因素均值为零时证券的收益率。

SIM有如下假设：

- 收益率的生成过程由上述回归方程描述
- 对每一证券i， $E(\varepsilon_{it})=0$
- 每一证券的残差与宏观因素不相关，这意味着因素的结果对随机误差的结果没有任何影响。

$$Cov(\varepsilon_{it}, F_t) = 0$$

- 证券i与j的残差不相关，这意味着一种证券的随机误差结果对任意其他证券的随机误差结果不产生任何影响。换句话说，两种证券的回报率仅仅通过对因素的共同反应而相关联。 $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

上述方程中证券i的期望收益、方差、协方差分别为

- **期望收益率：根据单因素模型，证券 i 的期望收益率可以表示为**

$$E(R_i)=\alpha_i+\beta_i E(F)$$

- 方差：在单因素模型中，同样可以证明任意证券 i 的方差等于：

$$\sigma_i^2=\beta_i^2\sigma_F^2+\sigma^2(\varepsilon_i)$$

在这里，δ^2_F是因素的方差，$\delta^2(\varepsilon_i)$是随机误差项的方差

- 协方差：在单因素模型中，计算证券间的协方差变得十分简单。

$$\sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_F^2$$

对外经济贸易大学
UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

- 正是因为可以用这种简单方式计算协方差，使指数模型能够克服马柯威茨模型的庞大计算量的困难。如果组合里有n项资产，计算组合的方差——协方差矩阵需要进行$1/2n(n+1)$次方差-协方差的测算，但现在只需要测算n个β_i和1个δ^2_F就可以了。

三、单因素模型中表示的系统风险与非系统风险

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i F_t + \varepsilon_{it}$$

因素模型是一个描述证券收益生成的模型。ε_{it} 表示非系统风险，$\alpha_i + \beta_i F_t$ 表示系统风险，其中，α_i 表示宏观因素均值为零时证券的期望收益。

由第二章的内容可知，

总风险＝系统风险＋非系统风险

系统风险是指整个市场所承受到的风险，如经济的景气情况、市场总体利率水平的变化等因为整个市场环境发生变化而产生的风险，即每一证券的风险来源是一样的。由于市场风险与整个市场的波动相联系，因此，无论投资者如何分散投资资金都无法消除和避免这一部分风险。

非系统风险是公司特有的风险，诸如企业陷入法律纠纷、罢工、新产品开发失败等等，即每一证券的风险来源是独立的。风险与整个市场的波动无关，投资者可以通过投资分散化来消除这部分风险。

第二节、资本资产定价模型与因素模型

一、市场模型

二、资本资产定价模型与因素模型的关系

一、市场模型(Market Model)

- 在实际应用过程中常用证券市场指数来作为影响证券价格的单因素，此时的单因素模型被称为市场模型。市场模型实际上是单因素模型的一个特例。

- 假设一种股票在某一特定时期内的收益率与同一时期证券市场指数（如标准普尔500指数）的收益率相联系，即如果行情上扬，则很可能该股票价格会上升，市场行情下降，则该股票很可能下跌。因此，可以用市场模型的方程表示这一关系：

$$r_i = \alpha_{Ii} + \beta_{Ii} r_I + \varepsilon_{iI}$$

式中：r_i代表某一给定时期证券i的收益率

I代表市场指数

r_i代表相同时期市场指数I的收益率

ε_{iI}是随机误差项

- 例子：考虑股票A，有 α_{Ii} =2%，β_{Ii}=1.2，这意味着股票A的市场模型为：

$$r_A = 2\% + 1.2 r_{iI} + \varepsilon_{AI}$$

因此，如果市场指数回报率为10%，则证券A的回报率预期为14%（=2%+1.2*10%）。同样，如果市场预期的回报率为-5%，则证券A的预期回报率为-4%。

- 注意：由于随机误差项的存在（表示证券回报率中没有被市场模型所完全解释的部分），当市场指数上升10%或下降5%时，证券A的回报率将不会准确地为14%或-4%。即，实际回报率和所给定市场指数回报率之间的差额将归结于随机误差项的影响。

二、资本资产定价模型与因素模型的关系

CAPM可视为一个特殊的单因素模型，在那里的市场组合收益率r_M实质上就是一个单因素。以市场组合的收益率的风险补偿来作为宏观经济指数，于是有：

$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i (r_m - r_f) + \varepsilon_i$，

或者$R_i = \alpha_i + \beta_i Rm + \varepsilon_i$

（实际上这是证券i对市场组合收益的回归方程，其回归直线就是证券i的特征线）

但资本资产定价模型是一个资产定价的均衡模型，而因素模型却不是。例如，比较分别由资本资产定价模型和因素模型得到的证券的预期收益率：

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(F)$$

$$E(R_i) = r_f + (E(r_M) - r_f)\beta_i$$

前者不是一个均衡模型，而后者是均衡模型

- 既然单因素模型不是一个均衡模型，那单因素模型中参数α_i和β_i与资本资产定价模型中单因素β_i之间存在怎样的关系呢？
- 例如，如果实际收益率可以看作是由单因素模型产生，其中因素F是市场组合的收益率r_M，那么预期收益率将等于：

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(r_M)$$

- 根据资本资产定价模型，如果均衡存在，则

$$E(R_i) = (1-\beta_i) r_f + E(r_M)\beta_i$$

- **这意味着，单因素模型和资本资产定价模型的参数之间必然存在下列关系：**

如果：$\alpha_i = (1-\beta_i)r_f$

即对证券的阿尔法的估计值刚好是证券均衡定价时的截距，

则 $\beta_i = \beta_i$ 即在由**CAPM**决定的收益率中的测度证券的市场风险大小的指标与在因素模型决定的收益率中的因素敏感性大小的值相同，意义相同。

我们可以再从以下角度看两个贝塔的关系：

因为有$R_i = \alpha_i + \beta_i Rm + \varepsilon_i$

那么证券i的风险补偿与市场组合的风险补偿的协方差是：

因为 $\sigma_{im} = \beta_i \beta_m \sigma_m^2 = \beta_i \sigma_m^2$

$\beta_m = 1$

从而 $\beta_i = \dfrac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$

- 这里的βi和资本资产定价模型（证券市场线）里的β系数是完全一样的，这也就是我们为什么把指数模模型里对宏观经济变量的敏感度也定义为β的原因。

- 在资本资产定价模型和市场模型中都有一个被称为ß值的斜率，并且这两个模型或多或少地包含了市场，但是它们之间却有明显的区别：

- 首先，资本资产定价模型是一个均衡模型，它描述证券的价格如何确定；市场模型是一个因素模型。
- 其次，资本资产定价模型是相对于整个市场组合而言的，即相对于市场中所有证券的集合。而市场模型是相对于某个市场指数而言，即基于市场中的一个样本。

- 虽然从严格意义上讲，资本资产定价模型中的ß值和市场模型中的ß值是有区别的，但是在实际操作中，由于我们不能确切知道市场组合的构成，所以一般用市场指数来代替，因此我们可以用市场模型中测算的ß值来代替资本资产定价模型中的ß值。

第三节、多因素模型

一、多因素模型的经验基础

二、多因素模型

一、多因素模型的经验基础

- 经济状况影响着大部分企业，因而对经济前景的预期的变化被认为对绝大部分证券的收益率产生深刻影响。然而经济并不是一个简单、统一的实体，因而我们需要确认一些具有广泛作用的共同影响力，比如：1.国内生产总值；2.利率水平；3.通货膨胀率；4.石油价格水平。
- 多因素模型对现实的近似程度更高。这一简化形式使得证券组合理论广泛应用于实际成为可能，尤其是20世纪70年代以来计算机的发展和普及以及软件的成套化和市场化，极大地促进了现代证券组合理论在实践中的应用。

二、多因素模型（Multifactor models）

- 与单因素模型不同，当考虑多个因素对证券收益率的影响时，则产生多因素模型，多因素模型更加清晰明确解释了系统风险，从而有可能展示不同的股票对不同的因素有不同的敏感性，这可能会使精确性得以提高。作为多因素模型的一个例子，我们考虑一个双因素模型，这意味着假设收益率生成过程中包含有两个因素。
- 例子：考虑两个公司，一个市公用事业单位，另一个是航空公司。

对外经济贸易大学 UNIVERSITY OF INTERNATIONAL BUSINESS AND ECONOMICS

- 双因素模型在t时期的方程式为：

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{i1} F_{1t} + \beta_{i2} F_{2t} + \varepsilon_{it}$$

- F_{1t}和F_{2t}是两个对证券回报率具有普遍影响的因素，β_{i1}和β_{i2}分别是证券i对两个因素的敏感性。同单因素模型一样，ε_{it}是随机误差项，α_i是当两个因素都取值为0是证券i的预期回报率。
- 在双因素模型中，我们需要为每种证券估计4个参数：α_i，β_{i1}，β_{i2}以及随机误差的标准差ε_{it}。对每个因素，需要估计两个参数：因素的预期值以及因素的方差和。此外还要估计两个因素的协方差$cov(F_1, F_2)$。

- **预期收益率**　利用上述估计值，证券i的预期收益率可以由下式计算得出：

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_{i1} E(F_1) + \beta_{i2} E(F_2)$$

- **方差**　根据双因素模型，任意证券i的方差为：

$$\sigma_i^2 = \beta_{i1}^2 \sigma_{F1}^2 + \beta_{i2}^2 \sigma_{F2}^2 + 2\beta_{i1}\beta_{i2} Cov(F_1, F_2) + \sigma_{\varepsilon i}^2$$

- **协方差**　根据双因素模型，同样可以计算出任意两种证券i和j的协方差为：

$$\sigma_{ij} = \beta_{i1}\beta_{j1}\sigma_{F1}^2 + \beta_{i2}\beta_{j2}\sigma_{F2}^2 + (\beta_{i1}\beta_{j1} + \beta_{i2}\beta_{j1}) Cov(F_1, F_2)$$

多因素模型的一般式是

$$R_{it}=\alpha_i+\beta_{i1}F_{1t}+\beta_{i2}F_{2t}+\ldots\ldots+\varepsilon_{it}$$

在多因素模型中，一个组合对某一因素的敏感性是对所含证券的敏感性的加权平均，权数为投资于各证券的比例。

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i$$

$$r_p = a_p + \beta_{p1} F_1 + \beta_{p2} F_2 + \varepsilon_p$$

$$a_p = \sum_{i=1}^{N} w_i a_i$$

$$\beta_{p1} = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_{i1}$$

$$\beta_{p2} = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_{i2}$$

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \varepsilon_i$$